

## THz 域交叉型アンジュレータ超放射光源の偏光度を決める要因

### FACTORS THAT DETERMINE DEGREE OF POLARIZATION OF A SUPERRADIANT THz SOURCE BASED ON A CROSSED-UNDULATOR CONFIGURATION

齊藤寛峻<sup>#</sup>, 武藤俊哉, 柏木茂, 日出富士雄, 三浦禎雄, 南部健一, 長澤育郎, 高橋健, 鹿又健, 柴田晃太郎,  
山田悠樹, 山本大喜, 山田志門, 濱広幸

Hirotooshi Saito <sup>#</sup>, Toshiya Muto, Shigeru Kashiwagi, Fujio Hinode, Sadao Miura, Kenichi Nanbu, Ken Takahashi,  
Ikuro Nagasawa, Ken Kanomata, Kotaro Shibata, Hiroki Yamada, Daiki Yamamoto, Shimon Yamada,  
Hiroyuki Hama

Research Center for Electron Photon Science, Tohoku University

#### Abstract

Factors that determine degree of polarization of a variably polarized superradiant THz source using a crossed-undulator have been examined. Theoretical consideration and numerical evaluation revealed that the dominant factor is angular dependence of phase difference caused by geometrical shift of optical path length due to the separated light source points of each polarization component. This angular dependence substantially limits an effective angular range and available radiation intensity to obtain high degree of polarization. Although this effect can be weakened by reducing the ratio of phase shifter length to undulator length, the ratio of the effective radiation intensity to total intensity is in the range of approximately 10% or less to obtain a degree of circular polarization of 0.9. This polarization property does not depend on radiation wavelength. In an example our prototype system (a bunch charge of 20 pC, a frequency of 1.9 THz and the number of undulator periods of seven), the aperture angle to obtain a degree of circular polarization of 0.9 was calculated to be 2.9 mrad. It corresponds to the effective radiation energy of 4.8 nJ/bunch. The effective intensity is expected to be 34 nJ/bunch by increasing the number of periods to 20.

#### 1. はじめに

THz 放射は 0.1~10 THz の周波数 (30  $\mu\text{m}$ ~3 mm の波長) を持つ電磁波である。非電離放射線でありながら、金属と水以外の様々な物質に対する透過性を持っている。またこの周波数のエネルギー帯は生体分子などの大きな分子の振動準位に対応する。こういった特性から、THz 放射の応用は生命科学分野でのイメージングや分光などをはじめ、幅広い分野へと広がっている。

右回り円偏光、左回り円偏光に対する吸収の違いを調べる円二色性分光はキラルな生体分子の構造解析に有効であることが知られている。しかし THz 領域には高い透過率を持つ複屈折物質が少ないことから、偏光素子を用いた偏光操作の技術が他の周波数帯に比べ制限されている。

東北大学電子光理学研究センターでは加速器ベースの偏光可変 THz 光源の基礎研究として、交叉型アンジュレータ光源の研究開発を行っている。交叉型アンジュレータは 2 台の互いに直交する偏向方向を持つ平面アンジュレータからの直交する直線偏光を重ね合わせることで任意の偏光を作り出す手法である[1]。これまでに可視光~X 線にわたる短波長域で実証されてきたが、我々は短バンチからの THz 域超放射の偏光操作を考えている。これまでに試験加速器 t-ACTS を用いた実験を想定したプロトタイプシステムの設計[2, 3]などを行ってきた。今回新たに理論的な考察及び数値計算を行い、交叉型アンジュレータの偏光度を決める要因について調べた。また高い偏光度、強度を得るための条件について

考察を行った。

#### 2. 偏光度に影響を及ぼす要因

交叉型アンジュレータの偏光の評価のため、ここではストークスパラメータ  $S_0, S_1, S_2, S_3$  [4] を利用する。各ストークスパラメータは強度の次元を持ち、それぞれ全強度、水平直線偏光と垂直直線偏光の強度差、45°直線偏光と 135°直線偏光の強度差、右回り円偏光と左回り円偏光の強度差を表す。

$$P_1 \equiv S_1/S_0, P_2 \equiv S_2/S_0, P_3 \equiv S_3/S_0 \quad (1)$$

は規格化ストークスパラメータと呼ばれ、それぞれ-1 から +1 までの値をとる。 $P_3$  は円偏光度とも呼ばれる。また

$$P \equiv \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2} \quad (2)$$

は 0 から 1 までの値をとる全偏光度である。

まず完全単色かつ同じ振幅を持つ水平直線偏光と垂直直線偏光を位相差  $\psi$  で重ねる理想的な場合について考える。このとき規格化ストークスパラメータと全偏光度は次式のように表される。

$$\begin{aligned} P_1 &= 0 \\ P_2 &= \cos \psi \end{aligned} \quad (3)$$

<sup>#</sup>hsaito@lms.tohoku.ac.jp

$$P_3 = \sin \psi$$

$$P = 1$$

同じ強度の水平直線偏光と垂直直線偏光を重ね合わせる場合  $P_1$  は位相差によらずゼロであり、 $P_2, P_3$  が位相差に応じて変化する。

次に偏光度に影響を及ぼす要因について考える。ここでは(1)アンジュレータ周期数の有限性(周期数に起因する周波数広がり)、(2)電子ビームのエネルギー広がり(周期数に起因する周波数広がり)、(3)2台のアンジュレータ放射の強度のずれ、(4)観測角度に依存する位相差のずれ、の4つの効果について考える。

アンジュレータ超放射はアンジュレータ周期数に等しいサイクル数を持つ光である。したがって周期数が小さい場合には、2つのパルスが重ならず偏光操作が行われない波束の先端、後端部分の寄与が無視できなくなり、偏光度が低下する。これが要因(1)の効果である。この効果による偏光度の低下は次式で表される。

$$P_N(\psi) = \begin{cases} 1 - \frac{|\psi|}{2\pi N} & (|\psi| \leq 2\pi N) \\ 0 & (|\psi| > 2\pi N) \end{cases} \quad (4)$$

ここで、実用的には位相差の調整範囲は $-\psi$ から $+\psi$ までで十分であることを考慮すると、偏光度は $1-1/2N$ 以上の値をとることになる。この値は $N=10$ で $0.95$ 、 $N=5$ でも $0.9$ であるから、比較的小きな周期数においてもこの効果の影響は大きくない。またここでは詳細は省くが、周期数に起因する有限の周波数広がりによる効果として周波数領域での解析を行うことでも Eq. (4)と同一の結果を得ることができる。

これに対し要因(2)は、電子ビームのエネルギー広がりによる周波数広がり(2)の影響である。アンジュレータ周波数はビームエネルギー $\gamma$ の2乗に比例することから周波数広がり $\Delta\gamma$ で表される。要因(1)の効果及び周期数に起因する周波数広がり $1/N$ で表されることを考慮すると、典型的な相対エネルギー広がり( $\leq 1\%$ )のビームにおいてこの効果はほぼ無視できると考えられる。

要因(3)について考える。2台目の放射強度を1台目の $(1+r)$ 倍とすると、規格化ストークスパラメータと全偏光度は次式のように書ける。

$$P_1 = -\frac{r}{2+r}$$

$$P_2 = R(r) \cos \psi \quad (5)$$

$$P_3 = R(r) \sin \psi$$

$$P = 1$$

$$R(r) \equiv \frac{2\sqrt{1+r}}{2+r} \quad (6)$$

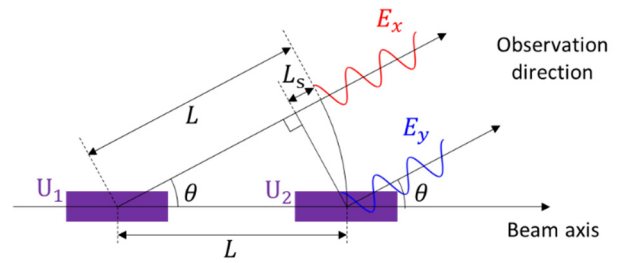


Figure 1: Schematic diagram of a wavefront of two polarization components when phase difference is set to zero on the axis.  $L$  and  $\theta$  denote distance between the center of undulators and observation angle, respectively.

強度のずれ  $r$  が増えるにつれ、 $P_2, P_3$  の振幅が係数  $R(r)$  だけ低下することになる。ここで  $R(r)$  が  $1\%$  低下するときの  $r$  を求めると、 $r = -0.25, 0.34$  となる。後述するプロトタイプシステムのように各アンジュレータにおけるバンチ長が揃うようなビーム光学系を用いれば強度のずれをこれより小さく抑えることは十分可能であると考えられる。この要因(3)による影響も実質的には問題にならないだろう。

Figure 1 に要因(4)の効果をも模式的に示す。放射軸上での位相差をゼロに設定していたとしても、有限の観測角度  $\theta$  で見た場合には図の  $L_s$  に相当する光路長のずれが幾何学的に発生する。これは次式で書ける。

$$L_s(\theta) = L(1 - \cos \theta) \quad (7)$$

例として  $L=3$  m、典型的な THz アンジュレータの角度広がりとして  $\theta=10$  mrad の場合を考えると、 $L_s = 150 \mu\text{m}$  となる。これは THz 放射の波長と同程度であるため、この効果による位相差の角度依存性は大きくなると考えられる。

### 3. 偏光の数値的な評価

#### 3.1 多粒子放射計算コードの開発

先述した4つの要因による効果の確認、及び現実的に得られる偏光度、放射強度の評価を行うため、多粒子放射計算コードを開発した。本コードでは Fig. 2 に示されるような2台のアンジュレータを距離  $L_p$  だけ離して直列に配置したシンプルなジオメトリを仮定する。1台目、2台目のアンジュレータにおける電子の偏向方向をそれぞれ  $x, y$  方向とし、ビームの進行方向を  $z$  方向とする。3次元的な多粒子トラッキングを行い、各アンジュレータセクションにおいて発生する放射電場を各粒子ごとに計算する。アンジュレータセクションのトラッキングは磁場中の運動方程式を数値的に解くことにより行う。この際のアンジュレータ磁場はコード Radia [5]により事前に生成したマップデータを用いて計算する。移相器における転送は  $6 \times 6$  の転送行列を用いて計算する。この数値の転送行列はビーム光学総合計算コード SAD [6]を用いて生成する。電場の計算には、Lienard-Wiechertポテンシャルから導かれる荷電粒子からの放射電場の式[7]

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{\gamma^2 R^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} + \frac{\vec{n} \times \left\{ (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right\}}{cR(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} \right]_{t_r} \quad (8)$$

を用いる。またこの際、下式で表される 4 つの偏光成分について計算を行う。

$$\begin{aligned} E_\sigma &= \vec{e}_\sigma \cdot \vec{E} \\ E_\pi &= \vec{e}_\pi \cdot \vec{E} \\ E_{45} &= \frac{E_\sigma + E_\pi}{\sqrt{2}} \\ E_R &= \frac{E_\sigma + iE_\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_\sigma &= \frac{1}{\sqrt{1 - n_y^2}} \begin{pmatrix} n_z \\ 0 \\ -n_x \end{pmatrix} \\ \vec{e}_\pi &= \frac{1}{\sqrt{1 - n_y^2}} \begin{pmatrix} -n_x n_y \\ 1 - n_y^2 \\ -n_y n_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $\sigma$ ,  $\pi$  は 1 台目のアンジュレータを基準とした  $\sigma$  成分、 $\pi$  成分であり、 $i$  は虚数単位である。Eq. (10) は  $\sigma$  成分、 $\pi$  成分の単位ベクトルの表式を示しており、 $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  は観測方向の単位ベクトルである。各粒子からの電場に対し、共通の観測時刻における値を補間により求め、積算することにより、全粒子からのトータルの放射電場を計算する。このトータルの電場をフーリエ変換し、適当な周波数範囲で積分することによって各偏光成分の強度が求められる。これを用いることで各観測点のストークスパラメータが計算できる。位相差の調整は 1 台目のアンジュレータ放射計算時の観測点の  $z$  座標をずらすことにより導入される。

### 3.2 プロトタイプシステム

今回、東北大学電子光理学研究センターの試験加速器 t-ACTS における実験を想定し設計されたプロトタイプシステムについて数値的な評価を行った。本システムにおいて仮定するビームパラメータとアンジュレータパラ

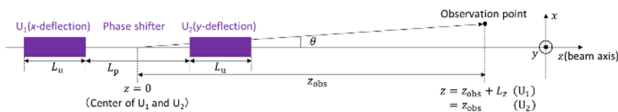


Figure 2: Schematic diagram of the geometry assumed in the radiation calculation code.

Table 1: Parameters of Electron Beam and Undulator

Electron beam	
RF frequency	2856 MHz
Macropulse duration	2 $\mu$ s
Beam energy $E$	22 MeV
Energy spread $\sigma_\delta$	1% (rms)
Normalized emittance	3 mm-mrad ( $x$ ) 6 mm-mrad ( $y$ )
Bunch length $\sigma_t$	80 fs (rms)
Bunch charge $Q$	20 pC
Planar undulator	
Magnet array type	Halbach array
Block size ( $x, y, z$ )	70 mm, 23 mm, 20 mm
Period length	80 mm
Number of periods	7
Gap	33 mm
Residual magnetic field	1.221 T
Peak magnetic field	0.471 T ( $K = 3.51$ )

メータは Table 1 の通りである。また、アンジュレータセクション、移相器セクションの長さはそれぞれ  $L_u = 0.7$  m,  $L_p = 3.14$  m としている。本システムでは各放射の強度が一致するよう、各アンジュレータにおける電子ビームの横方向位相空間分布は上流・下流対称となるよう、縦方向位相空間分布は順方向に対称となるような設計となっている。特に縦方向の対称な位相空間分布を実現するために移相器の  $R_{56}$  は可変になっており、第 1 アンジュレータの  $R_{56} = 2.27$  mm、及びそれに起因する 75.7 fs のバンチ伸長が移相器で補正できるようになっている。そのような光学系を実現するため、移相器のビームラインとしてトリプルベンドが採用されている。詳細は[2]を参照。

### 3.3 計算結果

軸上の周波数スペクトルの計算により得られた放射の基本周波数は 1.92 THz、rms 周波数広がり  $\sigma_f = 0.10$  THz であった。 $\pm 3\sigma_f$  の周波数バンド幅により計算される全放射強度の空間分布は概ね  $xy$  対称であり、rms 角度広がり  $\sigma_\theta = 16.4$  mrad であった。アパーチャー角度  $3\sigma_\theta$  での積分した放射強度は 285 nJ/bunch であった。以降ではこの値を放射の全強度として用いる。

Figure 3 に軸上における規格化ストークスパラメータと偏光度の位相差依存性を示す。位相差ゼロでは  $P_1 = 0$ ,  $P_2 = -1$ ,  $P_3 = 0$  の  $135^\circ$  の直線偏光であり、位相差が変化するにつれ  $P_2, P_3$  が  $2\pi$  の周期で連続的に変化していく。全偏光度は位相差が増えるにつれニアに減少する。この全偏光度の位相差依存性を Eq. (4) でフィットすると  $N = 7.3$  が得られる。したがって Fig. 3 の計算結果は前述の偏光度に影響を及ぼす要因(1)でよく説明することができる。また要因(2), (3)の効果はここでは無視できることがわかる。結局軸上では  $P(\psi = \pi) = 0.94$  以上の高い偏光度を持つ任意の偏光生成が可能である。

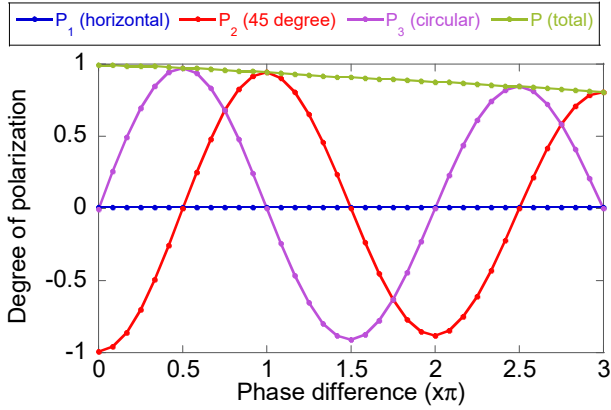


Figure 3: Phase difference dependence of the normalized Stokes parameters,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  and degree of polarization  $P$  on the axis.

Figure 4 に軸上の位相差を $\pi/2$ に設定したときの規格化ストークスパラメータと偏光度の空間分布を示す。 $P_1$ ,  $P$  は角度によらず一定である。一方、 $P_2$ ,  $P_3$  は軸上では設定した位相差に対応する $P_2 = 0$ ,  $P_3 = 1$  (右回り円偏光) であるが、放射軸の角度に依存して変化している。これらの結果から、角度に依存して位相差がずれ、偏光状態が変化していることがわかる。この効果により 4 mrad 程度で円偏光と直線偏光が入れ替わっていることが図から見て取れる。放射強度の角度広がり が 16.4 mrad であったことから、この角度広がりの範囲内で偏光状態が大きく変化することになる。

偏光の角度依存性のために純粋な偏光を得るには角度制限が必要になる。角度制限の効果について調べるため、放射軸からある一定の角度までを切り取る円形パーチャー内部の光の円偏光度、強度を計算した。Figure 5 に軸上の位相差を $\pi/2$ に設定したときの結果を示す。図のドットは数値計算結果を、実線は解析的な計算結果を表す。解析的な計算はガウシアン型の強度分布及び要因(4)の考察から得られる以下の位相偏差、円偏光度の表式を仮定した。

$$\Delta\psi(\theta) = -2\pi \frac{L_s(\theta)}{\lambda(\theta)} \approx -2\pi \frac{L\gamma^2\theta^2}{\lambda_u \left(1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2\theta^2\right)} \quad (11)$$

$$P_3(\psi_0, \theta) = P_N(\psi_0 + \Delta\psi(\theta)) \sin(\psi_0 + \Delta\psi(\theta)) \quad (12)$$

ここで、 $\lambda(\theta)$ は角度 $\theta$ におけるアンジュレータ放射波長を

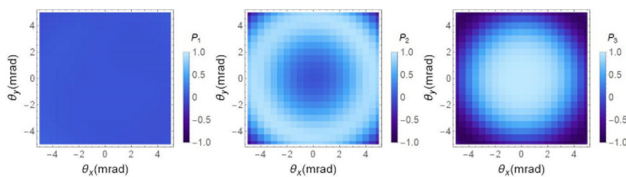


Figure 4: Spatial distribution of the normalized Stokes parameters at  $\psi_0 = \pi/2$ . The left, the middle and the right figure show  $P_1$ ,  $P_2$ , and  $P_3$ , respectively.

表す。 $\lambda_u$ はアンジュレータ周期長、 $K$ は偏向定数である。また、ガウシアン分布の角度広がりには以下のアンジュレータ放射の角度広がりの公式[8]から計算される値 $\sigma_\theta = 11.8$  mrad を仮定した。

$$\sigma_\theta = \sqrt{\frac{\lambda}{2N\lambda_u}} \quad (13)$$

$P_3$  の計算結果が数値計算と解析計算で概ね一致していることは、位相差、偏光度の角度依存性が要因(4)として考察した幾何学的な光路長のずれによりよく説明できることを意味する。数値計算によると、 $P_3 = 0.9$  を得るためには 2.86 mrad の角度制限が必要になる。このときの有効強度は 4.85 nJ/bunch、27.6 uJ/macropulse (ピークパワー13.8 W) であるが、全強度に対する割合では 1.70% に制限されることになる。このことから、交叉型アンジュレータの偏光度を決める支配的な要因は位相差の角度依存性であり、この影響は大きいと言える。

## 4. 有効強度の改善

### 4.1 位相差の角度依存性の一般化

Eq. (11)をもとに、位相差の角度依存性を弱め、有効強度を増加させるための条件について考察する。Eq. (13)で表されるアンジュレータ放射の角度広がり $\sigma_\theta$ により Eq. (11)の角度を規格化すると、以下の式が得られる。

$$\Delta\psi(\theta_n) = -2\pi \frac{(1 + L_r)\theta_n^2}{4 + \frac{\theta_n^2}{N}} \quad (14)$$

$$\theta_n \equiv \frac{\theta}{\sigma_\theta}, L_r \equiv \frac{L_p}{L_u} \quad (15)$$

Eq. (13)で表される放射の角度広がりには放射波長により変化するものの、位相差の $\theta_n$ 依存性は変化しない。したがって、放射波長を変えても実質的に角度依存性を弱め、有効強度を増加させることはできないと考えられる。

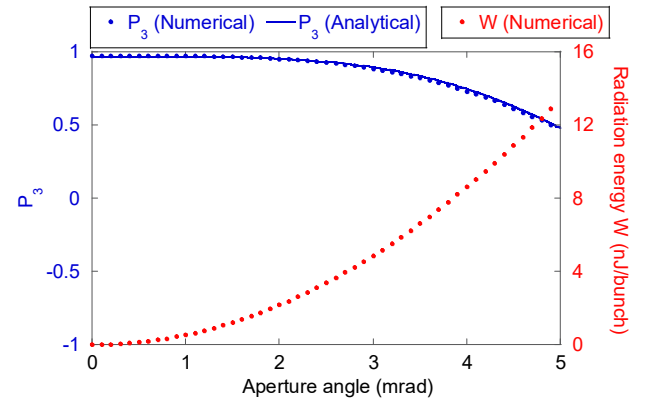


Figure 5:  $P_3$  (blue) and normalized radiation energy (red) within a circular aperture. The dots and solid line denote numerical calculation and analytical calculation, respectively.



一方、アンジュレータ長に対する移相器長  $L_r$  を小さくすることで角度依存性を弱めることができる。 $L_r$  を減少させるための方法としては、移相器長を短くすること、あるいはアンジュレータ周期数を増やすことが挙げられる。光源点間の距離が長くなる後者の方法により角度依存性が弱まるのは、放射の角度広がりが増えるためである。しかし  $N \rightarrow \infty, L_r \rightarrow 0$  の極限をとっても

$$\Delta\psi(\theta_n) = -\frac{\pi}{2}\theta_n^2 \quad (16)$$

であり、少なくとも  $\theta_n = 1$  で  $\pi/2$  の位相差のずれは残ることがわかる。したがって角度、強度の制限を完全に除くことはできない。

#### 4.2 アンジュレータ周期数による有効強度の増加

プロトタイプのパラメータを基準として、アンジュレータ周期数により有効強度をどの程度増やすことができるか具体的に考える。Figure 6 は Eq. (14) の位相差の角度依存性、Eq. (12) の  $P_3$  の角度依存性、ガウシアン型の強度分布を仮定し解析的に計算した  $P_3$  と有効強度のアーチャー角度依存性である。角度は放射の角度広がり規格化した  $\theta_n$  を、強度は全強度に対する割合を示している。周期数が  $N = 7, 20, 40, \infty$  のときの  $P_3 = 0.9$  に対応する角度制限はそれぞれ  $\theta_n = 0.251, 0.398, 0.496, 0.720$ 、有効強度の割合は  $W_r = 3.09\%, 7.62\%, 11.6\%, 22.8\%$  である。

アンジュレータの  $R_{56}$  及びそれに起因するバンチ伸長は周期数に比例して増加する。有効に周期数増加の効果を得るには、このバンチ伸長によるフォームファクターの低下が十分小さならなければならないことに注意が必要である。このため、例えばプロトタイプの条件では 20~30 程度が周期数の上限となる。エネルギー広がりより小さいビームが利用できればこの上限は上がるが、現実的な周期数の値 ( $L_r$  の値) の範囲内で得られる有効強度の割合は 10% 程度以下になると考えられる。

周期数による絶対強度の増加は  $W_r$  の増加と周期数に比例する全強度の増加の積により算出される。Figure 6 の計算結果から、 $P_3 = 0.9$  の角度制限下では、 $N = 20, 40$  のときの絶対強度はそれぞれ  $N = 7$  の強度の 7.04 倍、

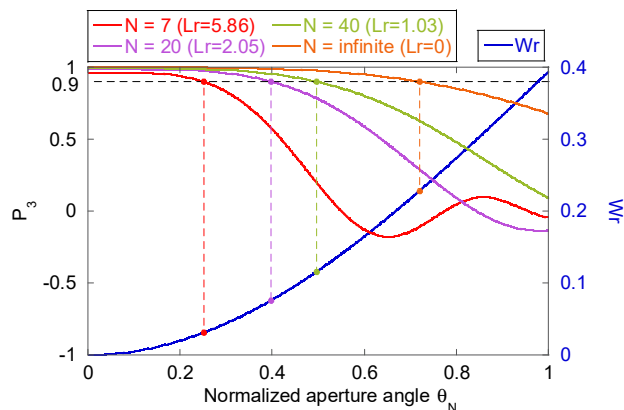


Figure 6: The number of period dependence of  $P_3$  and effective intensity  $W_r$  within a circular aperture. The horizontal axis is normalized aperture angle  $\theta_n$  expressed by Eq. (15).  $W_r$  is the ratio to total intensity.

21.5 倍と見積もられる。さらに前述の  $N = 7$  のときの数値計算結果を仮定すると、 $N = 20, 40$  における有効強度は 34.1 nJ, 104 nJ となる。したがってこの  $N = 20$  に対応する 34.1 nJ/bunch、193  $\mu$ J/macropulse (ピークパワー 96.5 W) 程度の強度は本交叉型アンジュレータシステムで十分到達可能であると考ええる。

#### 5. まとめ

交叉型アンジュレータを用いた偏光可変 THz 超放射光源の偏光度を決める要因、及び高い偏光度、強度を得るための条件について調べた。理論的考察及び数値計算により、2 台のアンジュレータ放射の光源点が離れていることに起因する位相差の角度依存性が偏光度をほぼ決めることを示した。この角度依存性のために、純粋な偏光を得るには角度制限が必要になり、これに伴い有効な放射強度が制限される。プロトタイプシステム ( $E = 22$  MeV,  $Q = 20$  pC,  $f = 1.9$  THz,  $N = 7$ ) の例では、円偏光度 0.9 を得るための角度制限は 2.9 mrad、このときの有効放射エネルギーは 4.8 nJ/bunch (全強度の 1.7%) である。この角度依存性による有効強度の割合の制限は放射波長にはよらず、アンジュレータ長に対する移相器長を小さくすることによってのみ緩和できると考えられる。ただしその上限は 10% 程度である。具体的な絶対強度の改善幅としては、先の例で周期数を 7 から 20 に増やすことにより約 7 倍の増加が見込まれる。

#### 参考文献

- [1] K.-J. Kim, Nucl. Instruments Methods Phys. Res. 219, pp. 425-429 (1984).
- [2] N. Morita *et al.*, Proceedings of the 16th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan, Kyoto, Japan, pp. 157-160 (2019).
- [3] H. Saito *et al.*, Proceedings of the 16th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan, Kyoto, Japan, pp. 445-448 (2019).
- [4] E. Hecht, Optics. Fourth Edition, Addison-Wesley, (2001).
- [5] O. Chubar *et al.*, J. Synchrotron Rad. 5, pp. 481-484 (1998).
- [6] <http://acc-physics.kek.jp/SAD/SADHelp.HTML>.
- [7] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics. Third Edition, John Wiley & Sons, Inc. (1998).
- [8] K.-J. Kim, AIP Conference Proceedings, 184, pp. 565-632 (1989).