

2.5 次元 PIC シミュレーションにおける鏡像電流のモデル化 MODELING OF IMAGE CURRENT FOR 2.5 DIMENSIONAL PIC SIMULATIONS

栗本 佳典
Yoshinori Kurimoto*
J-PARC Center

Abstract

Two point five dimensional PIC (Pixel-in-Cell) simulations are used for the multiparticle tracking of the J-PARC Main Ring. In PIC simulations, boundary conditions at beam pipes must be satisfied when the electromagnetic potentials are obtained. The boundary conditions of electric and magnetic fields are different. Electric potentials are always constants at the metal beam pipes while magnetic fields penetrates the beam pipes at low frequencies. We propose a new model that can include these physics. The model, which can be easily implemented to the 2.5 dimensional PIC simulations, roughly reproduces the measurement of coherent tune shifts. In addition, the new model can also include multibunch effects which are not negligible at the J-PARC Main Ring in terms of beam losses. In this report, we describe the new model and show the comparison of the coherent tune shifts between the measurement and the simulation using the new model.

1. 2.5 次元 PIC(PIXEL-IN-CELL) シミュレーション

大強度陽子シンクロトロン J-PARC Main Ring では、陽子数 3.4×10^{13} のバンチを加速している。1 パルス当たりのバンチ数は 8 でその合計の陽子数は世界最大レベルである。このような大きなバンチ内陽子数の場合には陽子バンチが作る電磁場の影響が無視できず、その運動を調べる際には空間電荷効果を含む粒子トラッキングシミュレーションが必要不可欠である。J-PARC Main Ringにおいては、2.5 次元の PIC (Pixel-in-Cell) シミュレーションを使用している [1,2]。2.5 次元シミュレーションでは、バンチの電荷密度 $\rho(x, y, z)$ を線電荷密度 $\lambda(z)$ と面電荷密度 $\sigma(x, y)$ に分解できると仮定し ($\rho(x, y, z) = \lambda(z)\sigma(x, y)$)、二次元のポアソン方程式

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})\phi(x, y) = \frac{\sigma(x, y)}{\epsilon_0} \quad (1)$$

を解いて得た 2 次元ポテンシャル $\phi(x, y)$ と線電荷密度の積 $\lambda(z)\phi(x, y)$ を 3 次元ポテンシャルとしている。このポテンシャルからキック

$$-A \times L \times (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})(\lambda(z)\phi(x, y)) \quad (2)$$

を得る。ここで L は計算のステップ幅で、 A は粒子の質量 m 、ガンマ因子 γ 、ベータ因子 β および光速 c を用いて $\frac{e}{m\gamma^3\beta^2c^2}$ と書ける。この係数は運動方程式

$$m \frac{dP_x}{dt} = m\gamma\beta^2c^2 \frac{dp_x}{ds} = F_E + F_B = F_E(1 - \beta^2) = \frac{F_E}{\gamma^2} \quad (3)$$

の式変形、

$$\frac{dp_x}{dx} = \frac{F_E}{m\gamma^3\beta^2c^2} \quad (4)$$

から得たものである。ここで P_x は運動量の x 成分、 F_E と F_B はそれぞれ速度 βc で移動する電荷分布の電場と磁場から受ける力である。このことから、境界条件を含めてポテンシャル $\phi(x, y)$ 得た場合、この規格化は厳密には正しくないことが分かる。なぜなら、導体上の境界条件は磁場と電場で異なるからである。磁場は周波数依存があり高周波では表皮効果により磁場はダクトの外に浸透しないが低周波では浸透し、ダクトの外側に磁極がある場合にはその影響も受ける。一方の電場は周波数に関わらず導体でのポテンシャルは一定となる。先に上げた 2 つのシミュレーションコード [1,2] では、ダクト境界上で $\phi(x, y) = 0$ として解いたポテンシャルに上記の係数 A を用いており、磁場には高周波成分しかないという近似となっている。

さてダクトでの境界条件すなわち鏡像電流の影響はコヒーレントチューンシフトで見ることができる。Figure 1 はシミュレーションコード [2] を用いた時の、コヒーレントチューンシフトの粒子数依存性を測定 [3] と比較したものである。このシミュレーションコードでは、断面が丸形か長方形の 2 種類を選ぶことができ、偏向電磁石内のダクトを実際の寸法に近い $115 \times 100 \text{ mm}^2$ の長方形と仮定し、残りを半径 62 mm の丸形ダクトとしている。測定（線）とシミュレーション（点）の一一致がよくないことが分かる。シミュレーション上のダクト

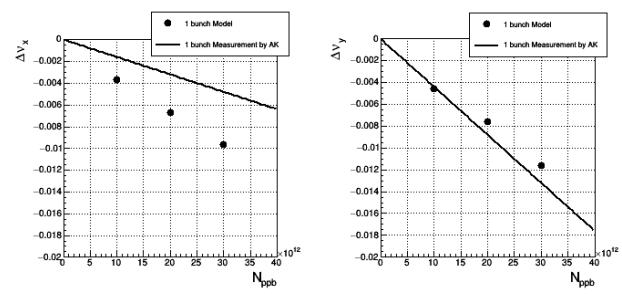


Figure 1: The depression of horizontal and vertical tunes as a function of the number of protons per bunch.

* kurimoto@post.j-parc.jp

径は円形と長方形の2種類しかないのでに対して実際の加速器は様々な形のダクトが存在しているため、これはあくまで近似的な計算である。しかしながら半径や長方形の形を変えても水平および鉛直方向のチューンを同時に実験に近づけることができない。このことから、このずれの原因をダクト径のバリエーションではなく境界条件を電場と磁場で同じとみなしていることが原因だと仮定して、比較的シンプルな周波数情報を含めたポテンシャルの計算方法（モデル）を考案し実験と比較をする。これが本報告の趣旨である。

2. 新モデル

最も単純な周波数モデルは全成分から DC 成分を抜き出し残りを高周波成分と仮定することである。したがって、線電荷密度を

$$\lambda(z) = \lambda_{DC} + \lambda_{AC}(z) \quad (5)$$

とおく。 λ_{DC} は線電荷密度 $\lambda(z)$ を全周にわたって平滑化したものである。ここで、新しいポテンシャルを以下のように定義する。

$$\phi(x, y, z) = \lambda(z)(\phi_{E,FREE}(x, y) + \phi_{E,IMAGE}(x, y)) \quad (6)$$

$$-\lambda_{DC}\beta^2(\phi_{E,FREE}(x, y) + \langle \phi_{POLE,IMAGE}(x, y) \rangle) \quad (7)$$

$$-\lambda_{AC}(z)\beta^2(\phi_{E,FREE}(x, y) + \phi_{E,IMAGE}(x, y)) \quad (8)$$

$$-\lambda_{DC}\beta^2(\phi_{E,IMAGE}(x, y) - \langle \phi_{E,IMAGE}(x, y) \rangle) \quad (9)$$

以下に各項を説明する。

第1項 電場による寄与 式 6 は電場による寄与である。 $\phi_{E,FREE}(x, y)$ は自由空間での静電ポテンシャルを表し、 $\phi_{E,IMAGE}$ はダクトの鏡像電荷によるポテンシャルである。したがって、境界条件付きでポアソン方程式を解けば、 $\phi_{E,FREE}(x, y) + \phi_{E,IMAGE}(x, y)$ がそのまま得られる。電場は周波数によらずダクト位置でポテンシャルがゼロとしてよいので、係数は $\lambda(z)$ となる。

第2項 DC (低周波) 磁場による寄与 式 7 は DC 磁場による寄与である。式 3 より静電ポテンシャルに係数 $-\beta^2$ を加えれば磁場の寄与となる。DC 磁場はダクトを透過していくので、鏡像電荷の効果はなく $\phi_{E,FREE}$ のみの寄与となる。式 7 の二番目の項 $\langle \phi_{POLE,IMAGE}(x, y) \rangle$ は磁極による効果である。強磁性体に対して磁場が垂直であるという境界条件から計算される値である。具体的には偏向電磁石の時のみ平行平板上の磁場が平板に垂直になるように鏡像電流を作つて計算される。平均 $\langle \cdot \rangle$ を取っているのは、コヒーレントチューンシフト測定の際にバッチ重心を蹴つて振動させるため、その DC 成分のみを抽出するためである。

第3項 AC 磁場による寄与 1 式 8 は AC (高周波) 磁場のうち縦方向分布変化による寄与で、高周波では上述のように電場と同じ境界条件でよいので、第 1 項に磁場を表す $-\beta^2$ をかけて $\lambda(z)$ を $\lambda_{AC}(z)$ に置き換えればよい。

第4項 AC 磁場による寄与 2 式 9 はコヒーレント振動による磁場 AC 成分に影響である。単純に

$\phi_{E,IMAGE}$ だけの場合、磁場 DC 成分のダクトによる鏡像電流という非物理的な効果を含んでしまうので、平均値 $\langle \phi_{E,IMAGE} \rangle$ との差を取っている。コヒーレント振動がない場合は両者はほぼ等しくこの項の寄与はなくなる。

Figure 2 はシミュレーションコード [2] にこの新モデルを実装した時の、コヒーレントチューンシフトの粒子数依存性を測定 [3] と比較したもので、従来モデル (Figure 1) よりも測定との一致が良くなっていることが分かる。

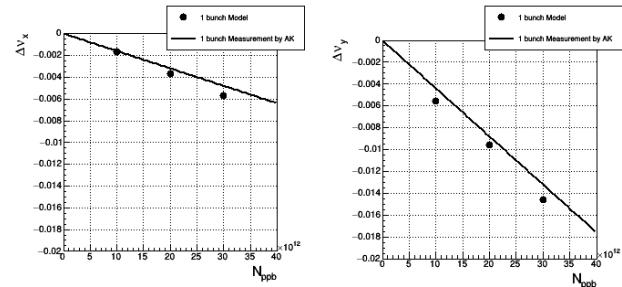


Figure 2: The depression of horizontal and vertical tunes as a function of the number of protons per bunch using the new model.

3. 多バンチ効果

ここで線電荷密度の DC 成分 λ_{DC} をあらわに書くと、

$$\lambda_{DC} = \frac{1}{C} \int_0^C dz \lambda(z) \quad (10)$$

となる。この定義から λ_{DC} はバンチ数に依存することが分かる。これまでのよう $\lambda(z)$ が 1 バンチの縦方向分布を表していると仮定すると、バンチ数 M の時は

$$\lambda_{DC} = \frac{M}{C} \int_0^C dz \lambda(z) \quad (11)$$

と書ける。実際に J-PARC Main Ring ではチューンシフトのバンチ数依存が無視できず、バンチ積算中（フラットベース）に四極電磁石を少しづつ変化させてチューン変化をコントロールしている [4]。Figure 3 に 8 バンチのときの式 11 を使ったシミュレーション（青点）と測定（青線）[3] を加えたものを示す。赤点と赤線はそれぞれ 1 バンチの時のシミュレーションと測定を表している (Figure 2 と同じもの)。この新モデルは 8 バンチの時の結果も概ね再現している。このモデルを使えばこの多バンチ効果によるビーム損失の原因を特定できる可能性があり、今後の課題の一つである。

4. まとめと今後

本報告では、2.5 次元の PIC シミュレーション中の鏡像電流の影響を DC 成分と AC 成分にわけてそれぞれに適した境界条件をつかうモデルを提案し、この新モデルは鏡像電流の影響を反映するコヒーレントチューンシフ

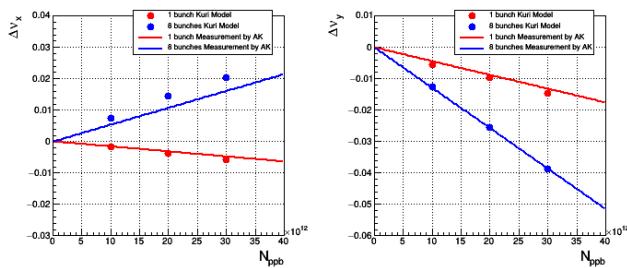


Figure 3: The depression of horizontal and vertical tunes as a function of the number of protons per bunch using the new model (1 bunch and 8 bunches).

トをある程度再現することを示した。さらに多バンチ効果にも有用なモデルであることも分かった。今後は新モデルで提案したそれぞれの項目がどのようにチューンシフトに寄与するのかを調べてより詳細なレポートにまとめる予定である。また、現段階ではビーム損失の原因および低減方法の調査に新モデルが必要不可欠かどうかは明らかでない。そのため、J-PARC MR の最大陽子数以上 ($> 3.4 \times 10^{13}$) で、ビーム損失の有意な増減 (0.1 % 以上) があるかどうかの詳細なシミュレーションも行う。

参考文献

- [1] K. Ohmi *et al.*, "Study of halo formation", in Proc. PAC'07, 2007, pp.3318 – 3320. doi:10.1109/PAC.2007.4440411
- [2] Y. Kurimoto, "Particle Tracking with Space Charge Effects using Graphics Processing Unit," in IEEE Transactions on Nuclear Science. doi:10.1109/TNS.2021.3084214
- [3] A. Kobayashi *et al.*, "Studies on Coherent Multi-Bunch Tune Shifts with Different Bunch Spacing at the J-PARC Main Ring". in Proc. IPAC'19, Melbourne, Australia, May 2019, pp. 167-170. doi:10.18429/JACoW-IPAC2019-MOPGW036
- [4] A. Kobayashi *et al.*, "BUNCH TRAIN TUNE SHIFT STUDY FOR HIGHER BEAM POWER AT J-PARC MR" Proceedings of the 15th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan August 7-10, 2018, Nagaoka, Japan.