

周期的強収束ラティスに整合した高密度バンチの初期位相空間分布生成 GENERATING PSEUDO-EQUILIBRIUM PHASE-SPACE DISTRIBUTIONS OF PARTICLES IN INTENSE BUNCHED BEAMS FOCUSED BY AN ARBITRARY PERIODIC LATTICE

小島邦洸, 岡本宏己

Kunihiro Kojima*, Hiromi Okamoto

Graduate School of Advanced Science and Engineering, Hiroshima University

Abstract

In particle-in-cell (PIC) simulations of high-intensity hadron beam dynamics, it is extremely important to provide an initial beam distribution well adapted to an arbitrary alternating-gradient lattice. The so-called “root-mean-squared (rms) matching” used to be employed for this purpose, but the matching error is then considerably enhanced at high beam density leading to a serious mismatch-induced emittance blowup. We outline a more sophisticated matching procedure that enables one to generate pseudo-equilibrium distributions of particles in six-dimensional phase space. Three different types of distribution functions, namely, the thermal equilibrium (TE), waterbag (WB), and parabolic (PA) distributions are considered here. Three-dimensional PIC simulations are performed to show that the present matching technique works fairly well for the generation of a quasi-stationary bunch at high space-charge density.

1. はじめに

空間電荷効果がビームの安定性に及ぼす影響の研究にとって自己無撞着な PIC シミュレーションは今や欠かすことのできない手段となっている。位相空間密度の非常に高いハドロンビームを取り扱う際、初期粒子分布の生成にはとりわけ注意が必要である。過去に行われた多くの PIC 計算では所謂“二乗平均 (RMS) 整合”が用いられているが [1, 2]、この手法は明らかに自己無撞着ではない。そのため、加速器へ入射されたビームは即座に本来あるべき定常状態の周りで集団振動を始め、結果として、ハロー形成による有意なエミッタンス増大が発生する [3, 4]。この問題はビームの位相空間密度が高くなればなるほど深刻化する。初期不整合によるエミッタンス増大は非線形共鳴等による弱い不安定性の存在を不明瞭あるいは完全に覆い隠してしまうため、何らかの方法で回避する必要がある。

外部収束力が設計軌道に沿って一樣な場合、上述の問題を回避するのは比較的容易である。定常状態のハミルトニアン H が運動の定数となるため、 H の任意関数として位相空間分布 (ブラソフ方程式の解) を定義でき、ポアソン方程式から自己無撞着なビームの位相空間形状が求まる。しかしながら、周期変動する現実的なビーム収束場を考慮すると、一般に運動の定数が未知であるため、定常分布関数の定義が非常に難しくなってしまう。唯一の例外は進行方向に連続的な “Kapchinsky-Vladimirsky 分布” であるが [5]、この分布は極めて特殊で、残念ながら現実から著しく乖離している。有用性の高いシミュレーション研究には、実際のビームにより近い非線形の定常状態を構築する手法の開発が不可欠である。

Steven Lund らはこの目的のため、自己クーロン場

を含めても強収束ラティスにほぼ整合した近似的定常分布を構築するための簡便な手法を考案した [6]。彼らの手法ではまず、平滑化されたラティスの下で、設計軌道の周りに回転対称性を持つ円筒状の定常状態を生成する。この定常状態を適切に歪めて、二次モーメントを (平滑化されていない) 実際の強収束ラティスの下で RMS エンベロープ方程式から導かれる値に合わせる。この手続きで得られるビームの状態はブラソフ・ポアソン方程式の定常解を正確に反映したものではないはずだが、伝統的な RMS 整合に比べて遙かに高い精度で擬似的な定常状態を構築できる。ただし、彼らの理論では、二次元的な連続ビームが想定されている。そこで本研究では、線形入射器中の大強度短バンチビームを想定した三次元 PIC シミュレーションへの適用を念頭に、Lund らの手法を三次元に拡張し、PIC コード “WARP” [7] に実装した。以下では、新しい三次元ビーム整合法の概要について説明した後、RMS 整合されたビームに基づく PIC 計算の結果と比較して、その有効性を検証する。

2. 三次元擬平衡状態の構築

三次元の擬平衡粒子分布の生成には以下の 3 つの手順が必要である。まず、RMS エンベロープ方程式を解いて、実際の強収束ラティス下での二次モーメントを計算しておく (Sect. 2.1)。次に、ラティスを適切に平滑化し、ブラソフ・ポアソン方程式の球対称な定常解を求める (Sect. 2.2)。最後に、二次モーメントが RMS エンベロープ方程式から求めた値に合うよう、球対称分布を変形する (Sect. 2.3)。

2.1 RMS ビーム径の決定

ビームの進行方向に z 軸をとり、それに直交する平面上の水平方向座標を x 、鉛直方向座標を y とする。それぞれの方向の RMS ビーム径 $a_w (w = x, y, z)$

* d200187@hiroshima-u.ac.jp

は以下の方程式を満足する：

$$\frac{d^2 a_w}{ds^2} + [K_w(s) - \Gamma g_w(s)] a_w - \frac{\varepsilon_w^2}{a_w^3} = 0 \quad (1)$$

ここで、 s はビーム輸送系の入り口 ($s = 0$) から測った軌道長、 Γ はパービアンス、 ε_w は w 方向の RMS エミッタンス、 $K_w(s)$ はラティス構造に依って決まる周期関数、また

$$g_w = \frac{3\lambda_3}{2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a_w^2 + \xi) \sqrt{(a_x^2 + \xi)(a_y^2 + \xi)(a_z^2 + \xi)}}$$

である。上式中の λ_3 は定数で、実空間上でのビーム構成粒子の密度分布が楕円対称性を有している限り、その値は分布の詳細にかかわらず $1/5\sqrt{5}$ に等しくなることが Sacherer により証明されている [1]。

以下では、Eq. (1) の定常解を $\hat{a}_w(w = x, y, z)$ と表記する。 $K_w(s) = K_w(s + L)$ の場合、つまり強収束ラティス構造の周期長が L の時、各自由度のチューンは

$$\nu_w = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \frac{\varepsilon_w}{\hat{a}_w^2} ds \quad (2)$$

のように定義される。 ν_w は粒子間クーロン斥力の効果を含んだ実効値で、設計チューン ν_{0w} より必ず小さい値をとる。設計値 ν_{0w} はエンベロップ方程式 Eq. (1) で $\Gamma = 0$ とした場合の定常解を Eq. (2) に代入して求める。実効チューンと設計チューンの比 $\eta_w = \nu_w / \nu_{0w}$ はチューン降下率 (tune depression) と呼ばれ、ビームの位相空間密度を表す指標である。空間電荷相互作用が弱い場合、 η_w は 1 に近い値を取り、位相空間密度が高くなるに従って 0 に近づく。

2.2 球対称定常分布の生成

$K_w(s)$ の代わりとして、 x, y, z の三方向について等しく時間的に一様な定数 κ_b を以下のように導入する：

$$\kappa_b = \frac{3\lambda_3\Gamma}{2a_b^3} \int_0^\infty \frac{d\zeta}{(1 + \zeta)^{5/2}} + \frac{\varepsilon_b^2}{a_b^4} \quad (3)$$

ここで a_b, ε_b は或る種の平均化された初期 RMS ビーム径と初期 RMS エミッタンスで、それぞれ $a_b = (\hat{a}_x \hat{a}_y \hat{a}_z)^{1/3}$ および $\varepsilon_b = (\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z)^{1/3}$ で与えられる。 a_b は厳密には周期関数であるが³、その変化量は通常極めて小さく、ほぼ定数と見なしてよい。よって、ここでは a_b として $s = 0$ における値を採用し、 κ_b を決定する。この時間的に一定な κ_b を用いて、以下のような定常ハミルトニアンを考える：

$$H_b(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2} + \frac{\kappa_b r^2}{2} + \frac{2\pi\epsilon_0\Gamma}{qN} \phi_{sc}(r) \quad (4)$$

ここで、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 、 N はバンチに含まれる総粒子数、 q は粒子の電荷、 ϵ_0 は真空の誘電率、 ϕ_{sc}

は定常状態における自己クーロン場のスカラーポテンシャルを表す。

外場が時間的に一様 ($\kappa_b = \text{const.}$) なので、 ϕ_{sc} は r のみの関数となり、したがって H_b は運動の定数である。この場合、 H_b の任意関数 $f(H_b)$ はブラソフ方程式を満たす。実空間上での電荷密度分布は $f(H_b)$ を全運動量空間にわたって積分することにより得られるので、 ϕ_{sc} は次のポアソン方程式から計算できる：

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \phi_{sc} \right) = -\frac{q}{\epsilon_0} \int \int \int f(H_b) dp_x dp_y dp_z \quad (5)$$

Equation (5) を数値的に解くことにより、自己無撞着な球対称空間電荷ポテンシャル $\phi_{sc}(r)$ が決定される。この ϕ_{sc} を Eq. (4) に代入することで定常ハミルトニアンが決まり、よって定常分布関数 $f(H_b)$ が確定する。

2.3 二次モーメントの整合

実際の強収束ラティスを考慮した場合、換言すれば、線形収束項の係数が定数 κ_b ではなく周期関数 $K_w(s)$ である場合、定常状態は当然のことながら球対称とはならない。そこで、エンベロップ方程式 Eq. (1) から求めた定常解 \hat{a}_w に基づき、各粒子の正準座標と正準運動量を以下のように変換する：

$$\begin{aligned} w &\rightarrow \left(\frac{\hat{a}_w}{a_b} \right)_{s=0} w, \\ p_w &\rightarrow \left(\frac{a_b \varepsilon_w}{\hat{a}_w \varepsilon_b} \right)_{s=0} p_w + \left(\frac{1}{a_b} \frac{d\hat{a}_w}{ds} \right)_{s=0} w. \end{aligned} \quad (6)$$

この変換により、球対称だった分布関数は (RMS エミッタンスの値を保ったまま) 所定の強収束ラティスに対応した二次モーメントを有する形に変形される。ただし、この最終的な粒子分布は、その構築過程から明らかかなように、ブラソフ・ポアソン方程式の正確な定常解とはなっていないと考えられる。球対称定常状態を導く際に用いた近似を考慮すると、エンベロップ振動がとくに大きい場合やバンチのアスペクト比が 1 から大きくずれている場合などにラティスとの整合性が悪化する可能性がある。

3. RMS 整合との比較

記述の通り、 $f(H_b)$ としてどのような形の関数を選ぶかは任意である。ここでは、ビームダイナミクスに関する多粒子計算で頻りに用いられてきた、以下の三種類の分布関数、すなわち、ガウシアンあるいは熱平衡分布 (TE)、ウォーターバグ分布 (WB)、パラボラ分布 (PA) について考察する：

$$\begin{aligned} \text{TE} : f(H_b) &= A \exp\left(-\frac{H_b}{T}\right) \\ \text{WB} : f(H_b) &= A \Theta(H_0 - H_b) \\ \text{PA} : f(H_b) &= A (H_0 - H_b) \Theta(H_0 - H_b) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 T は温度に対応する定数、規格化定数 A は分布関数の六次元位相空間上での積分値が総粒子数

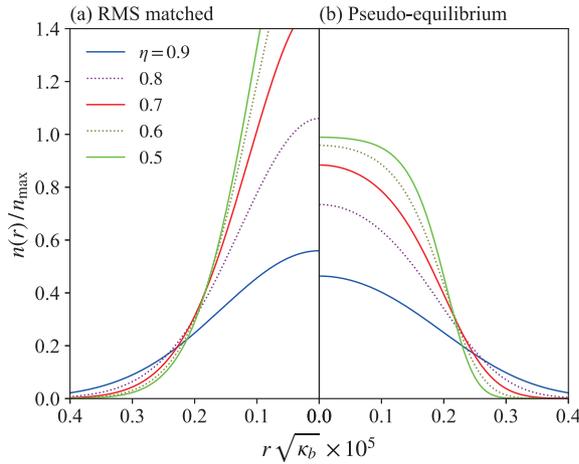


Figure 1: Radial profiles of (a) the rms matched Gaussian distribution and (b) thermal equilibrium distribution under the uniform linear focusing.

N に等しくなるよう選ぶ。WB 分布と PA 分布の定義式に現れる H_0 も定数で、これらの分布が含む粒子の最大エネルギーに対応している。 $\Theta(\chi)$ は単位ステップ関数で、 $\chi \geq 0$ の時は 1、 $\chi < 0$ の時は 0 となる。

一方、自己場ポテンシャル ϕ_{sc} の影響を無視した、従来の単純な RMS 整合には以下のハミルトニアンを用いる：

$$H_{\text{linear}}(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2} + \frac{\kappa_b r^2}{2} \quad (8)$$

この場合、ポアソン方程式 Eq. (5) を解くステップは不必要となる。ただし、エンベロップの計算は Eq. (1) を使って正確に行い、その結果に基づき、Eq. (6) による最終的な RMS 整合を施して初期粒子分布を生成する。

$f(H_b)$ および $f(H_{\text{linear}})$ が与える、変換 (6) 適用前の球対称な実空間粒子密度を Fig. 1 に示した。一例として、TE 分布が仮定されている。当然ながら、三自由度のチューン降下率は等しい；すなわち、 $\eta_x = \eta_y = \eta_z (\equiv \eta)$ である。尚、Fig. 1 の縦軸は低エミッタンス極限における粒子数密度 $n_{\text{max}} = 3qN\kappa_b/2\pi\Gamma$ で規格化されている。従来の RMS 整合は自己場とは無関係に密度分布を決めるため、その形状はチューン降下率 η に関わらず常にガウス型である (Fig. 1(a))。一方、ポアソン方程式から自己無撞着に生成した密度分布は所謂“デバイ遮蔽効果”により、 η の減少 (換言すれば、ビーム密度の上昇) に伴って、中央部分が平坦な台形状の分布に近づいていく。

外部収束力がビーム軌道に沿って周期的に変化する場合の三次元 PIC シミュレーションの結果が Fig. 2 である。ここでは、横方向のラティス関数 $K_w(s)$ ($w = x, y$) として、正弦波形が仮定されている。正弦波形による連続的な収束は、高密度ビームに対し、FODO ラティスによる収束とほぼ同じ物理的効果をもたらすことが知られている [8, 9]。進行方向については

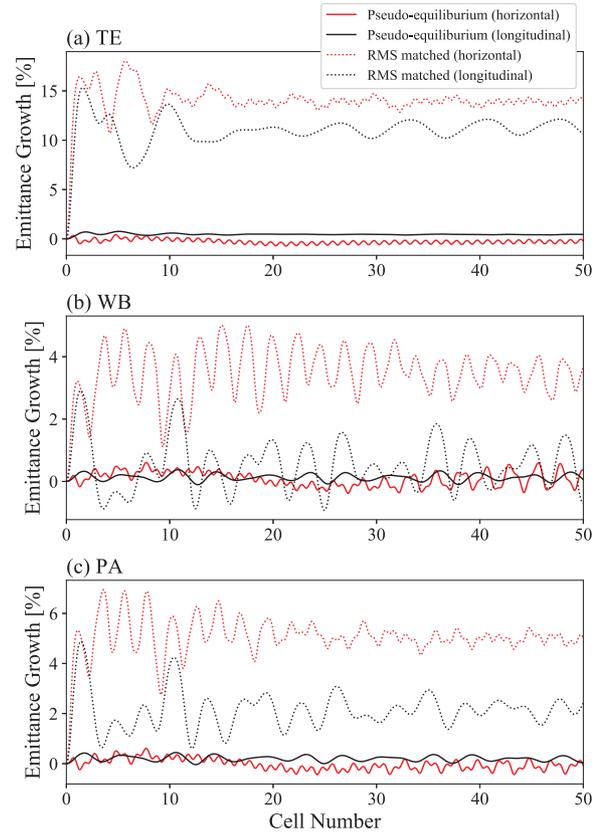


Figure 2: Time evolution of the rms emittances ε_x and ε_z .

簡単のため一様収束、すなわち $K_z = \text{const.}$ とした。チューンの設計値は $(\nu_{0x}, \nu_{0y}, \nu_{0z}) = (0.16, 0.16, 0.1)$ で、横方向のチューン降下率 $\eta_{x(y)}$ はいずれも 0.5 に合わせてある。また、三自由度のエミッタンス比はエネルギー等分配条件 $\varepsilon_x \nu_{0x} \eta_x = \varepsilon_y \nu_{0y} \eta_y = \varepsilon_z \nu_{0z} \eta_z$ を満たすよう、決定されている。この条件下での RMS アスペクト比 (\hat{a}_z/\hat{a}_x) の初期値はおおよそ 2 となる。

Figure 2 は、入射ビームが TE 分布、WB 分布、PA 分布を持つ場合のそれぞれについて WARP で計算した RMS エミッタンス増大率の時間発展をプロットしたものである。点線は従来の RMS 整合、実線は擬平衡分布に基づく計算結果であるが、その差は明らかである。単純な RMS 整合ビームは真の定常状態からのずれが大きいため、入射直後のほんの数ラティス周期でエミッタンスが大きく増大してしまっている。TE 分布のエミッタンス増大が最も顕著で三自由度とも 10% を超えている。その他の分布でも数% 程度の急激なエミッタンス増大とエミッタンス振動が見られる。このように有意なエミッタンスの変化は非線形集団共鳴等によるビーム不安定性の同定を困難にする。他方、擬平衡粒子分布では高々 0.5% 程度のエミッタンス増大しか発生しておらず、新しいビーム整合手続きは高密度領域でも十分上手く機能すると結論できる。

Figure 2 のシミュレーションで得られた、水平方向自由度の位相空間粒子分布を Fig. 3 に掲げる。Fig-

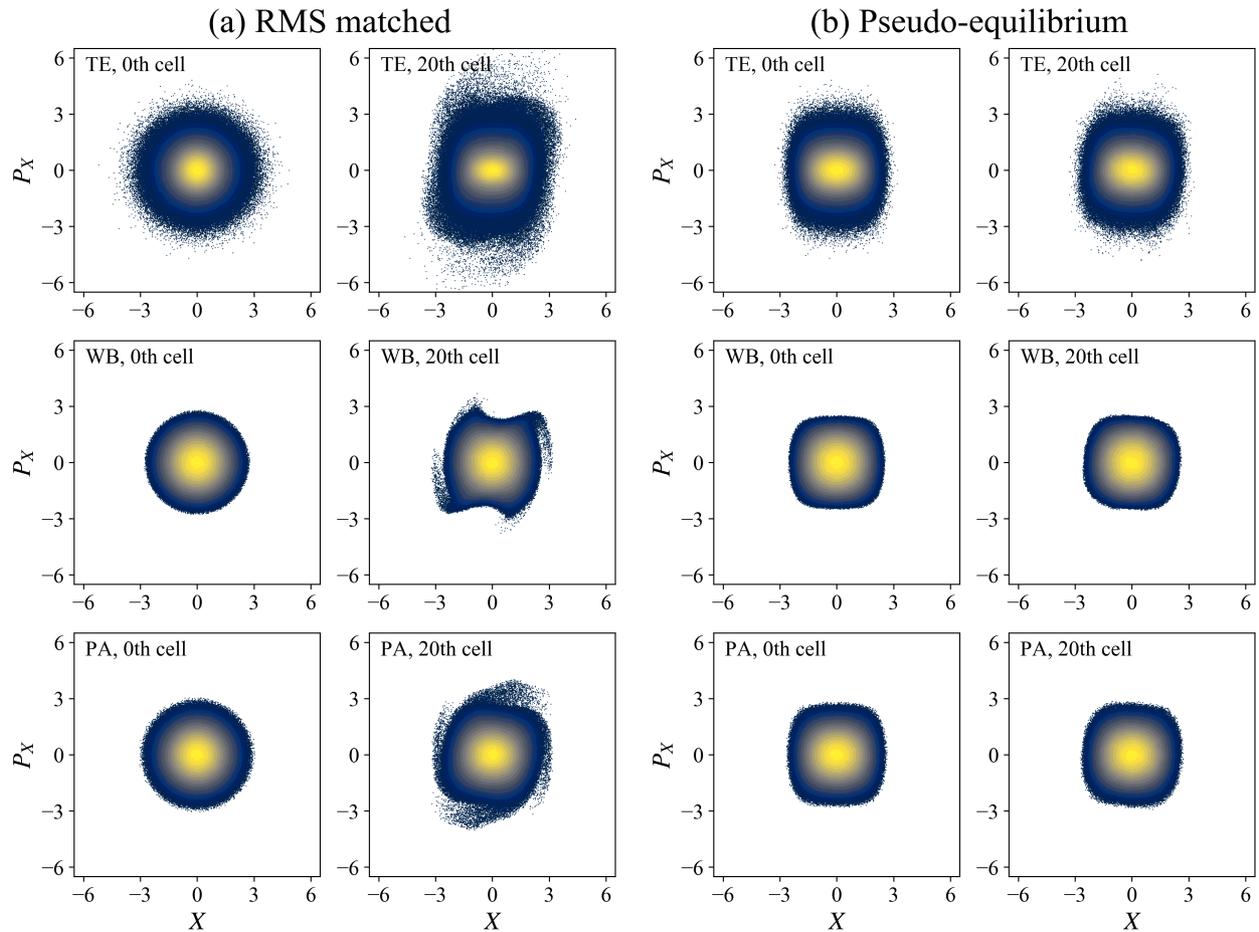


Figure 3: Particle distributions in the horizontal phase space at the entrance and 20th cell, corresponding to the PIC simulations in Fig. 2. The abscissa (X) and ordinate (P_X) are horizontal canonical variables scaled by their rms averages at injection.

Figure 3(a) は RMS 整合されたビーム、Fig. 3(b) は擬平衡状態のビームを入射した場合の結果で、いずれも左側のパネルが初期分布、右パネルは 20 ラティス周期通過後の状態を示している。RMS 整合ビームは楕円形であるのに対し、擬平衡ビームは四角く変形していることが見て取れる。定常状態では線形外力を打ち消すようにビームが自己組織化するため（デバイ遮蔽）、粒子分布は Fig. 3(b) のように歪むことになる。楕円状の RMS 整合分布は自発的に真の整合状態へ近づこうとするため、集団振動が発生し、結果として深刻なビームハローが形成される [3]。ハローの強度や空間的広がりにはビームの初期密度が高いほど大きくなる。Figure 3(b) の擬平衡ビームでは 20 収束周期後も初期状態がほぼ維持されている。

参考のため、密度の高い RMS 整合ビームにおいて不可避免的に発生する集団振動の様子を Fig. 4 に示しておく。ガウス型の RMS 整合ビーム (Fig. 4(a)) では、原点周りの高いピークが最初のラティス周期のうちに消失して一瞬ホロー状の分布になり、その後も継続的な集団振動を行って定常状態に近い形へと緩和していく。このように大きなプラズマ振動は擬

平衡ビームでは全く起きていない (Fig. 4(b))。

4. まとめ

Lund らが考案した二次元連続ビームに対する近似的定常状態の構築法を三次元に拡張した。三種類 (TE 型、WB 型、PA 型) の異なる擬平衡粒子分布の生成ルーチンを PIC コードに実装し、従来の RMS 整合ビームから出発したシミュレーションの結果と比較した。RMS 整合では粒子間クーロン相互作用による自己組織化の効果が全く取り入れられていないため、ビーム核の集団振動が誘起され、予想通りハロー生成による大きなエミッタンス増大につながった。エミッタンス増大が最も深刻だったのは TE 分布、続いて PA 分布、WB 分布の順であった。対照的に、第二章で解説した手順により生成された三次元擬平衡粒子分布では、かなりの高密度状態 ($\eta = 0.5$) でもエミッタンス増大はほとんど観測されず、強収束ラティスへの整合が高いレベルで達成できていることが確認された。

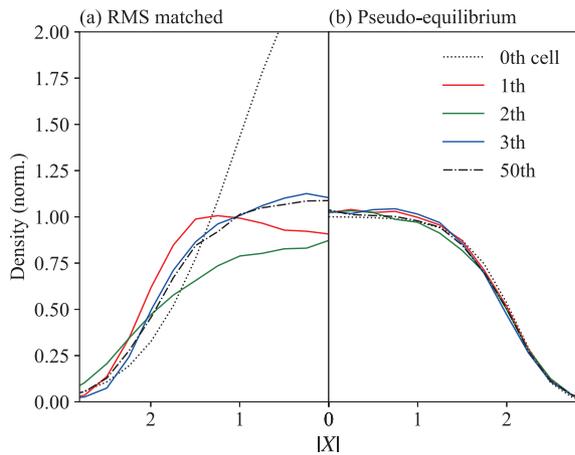


Figure 4: Transient evolution of the transverse density profiles in (a) an rms matched Gaussian bunch and (b) a pseudo-equilibrium bunch with the TE distribution.

参考文献

- [1] F. J. Sacherer, IEEE Trans. Nucl. Sci. **NS-18**, 1105 (1971).
- [2] M. Reiser, *Theory and Design of Charged Particle Beams* (John Wiley & Sons, New York, 2008) and references therein.
- [3] H. Okamoto and M. Ikegami, Phys. Rev. E **55**, 4694 (1997).
- [4] A. V. Fedotov, R. L. Gluckstern, S. S. Kurennoy, and R. D. Ryne, Phys. Rev. ST Accel. Beams **2**, 014201 (1999).
- [5] I. M. Kapchinskij and V. V. Vladimirkij, in *Proceedings of the International Conference on High-Energy Accelerators*, CERN, Geneva (1959), p. 274.
- [6] S. M. Lund, T. Kikuchi, and R. C. Davidson, Phys. Rev. ST Accel. Beams **12**, 114801 (2009).
- [7] D. P. Grote, A. Friedman, G. D. Craig, I. Haber, and W. M. Sharp, Nucl. Instrum. Meth. A **464**, 563 (2001).
- [8] K. Ito, H. Okamoto, Y. Tokashiki, and K. Fukushima, Phys. Rev. Accel. Beams **20**, 064201 (2017).
- [9] K. Fukushima, K. Ito, H. Okamoto, S. Yamaguchi, K. Moriya, H. Higaki, T. Okano, and S. M. Lund, Nucl. Instrum. Meth. A **733**, 18 (2014).