

J-PARC MR における共鳴と今後の調整方針 RESONANCES IN J-PARC MR AND FUTURE STRATEGY

安居孝晃 ^{*,A)}, 佐藤洋一 ^{A)}, 發知英明 ^{A)}, 五十嵐進 ^{A)}

Takaaki Yasui ^{*,A)}, Yoichi Sato ^{A)}, Hideaki Hotchi ^{A)}, Susumu Igarashi ^{A)}
^{A)} KEK

Abstract

In the fast extraction operation at the J-PARC main ring, various kinds of betatron resonances cause the beam loss. We will increase the number of locations where correction sextupole magnetic field can be applied to cope with third-order nonstructure resonances $3\nu_x = 64$, $\nu_x + 2\nu_y = 64$ driven by sextupole magnetic fields, apply the new beam optics to suppress eighth-order structure resonance $8\nu_y = 171$ driven by the space charge, pursue the three-fold symmetry of the ring to suppress nonstructure resonances driven by the space charge, and optimize the octupole magnetic fields and apply the new beam optics to suppress fourth-order structure resonance $2\nu_x - 2\nu_y = 0$ driven by the space charge.

1. イントロダクション

大強度陽子加速器施設 (J-PARC) の主リング (MR) はニュートリノ・ハドロン実験に向けて大強度ビームを 3 GeV から 30 GeV にまで加速して供給する陽子シンクロトロンである。MR ではビーム強度増強のため、運転繰り返し周期の短縮化とパルスあたり粒子数の増大化の研究を進めている。2022 年には高繰り返し化のため主電磁石電源をはじめとする様々なハードウェアのアップグレードを行った。この結果、繰り返し周期を速い取り出し (FX) 運転においては 2.48 s から 1.36 s へと、遅い取り出し (SX) 運転においては 5.2 s から 4.24 s へと短縮させることに成功した。2024 年 7 月現在、FX 運転では 800 kW、SX 運転では 80 kW のビームパワーを実現し、MR の所期性能である 750 kW をついに達成した。MR ではさらなる大強度化目標として FX 1.3 MW 運転を新たに掲げており、より早い周期でより多くの粒子を積むことを目指している [1]。

現在の FX 運転のパルスあたり粒子数は 2.3×10^{14} protons per pulse (ppp) であるが、FX 1.3 MW 運転に向けて 3.3×10^{14} ppp 程度にまで粒子数を増大することを計画している。現在 MR では RF システムの増強フェーズに入っており、RF 空洞の陽極電源の数を増やしていくことで加速可能な粒子数を順次増やしていく計画である。粒子数が増えた際に問題となるのがビームロス量であり、MR ではビームロスの観点からも 3.3×10^{14} ppp のビームを受け入れるための研究が進められている。

FX 運転におけるビームロス、ビーム取り出し時のものを除き、ほとんどがビームエネルギーの低い (約 5 GeV 以下) 期間に起こる。これは空間電荷効果とベータトロン共鳴との相互作用によってビームロスが起きていることを示している。Figure 1 に、二倍高調波 RF 空洞によってビーム分布が縦方向に広げられた後の加速前 (3 GeV) のチューン拡がり と 主な共鳴線を示す。MR は 3 回対称のシンクロトロンであり、Fig. 1 では実線は構造共鳴、点線は非構造共鳴を表している。まず構造共鳴に注目すると、明確にチューン拡がりを横切っているのは 8 次の共鳴であり、これらは空間電荷効果に起因する。これら

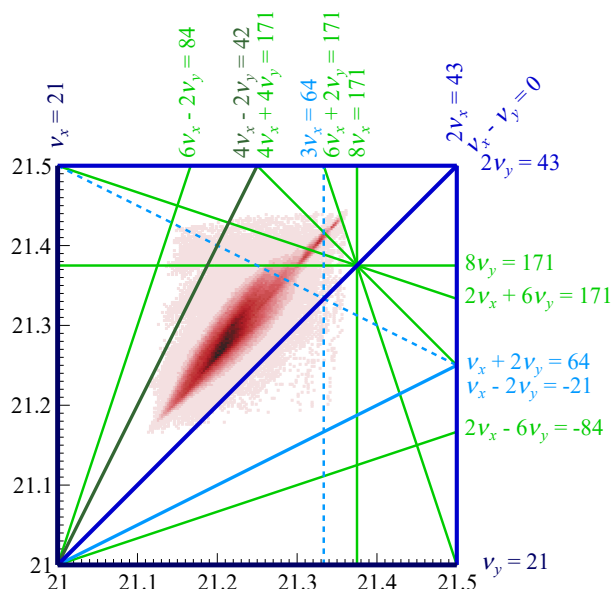


Figure 1: Tune spread and major resonances [2].

は比較的高次の共鳴であるものの、空間電荷シミュレーションを行うと電磁石の設置誤差・磁場勾配誤差がない条件下でもビームロスが起こるため、無視はできないものとなっている [2]。非構造共鳴でチューン拡がりを跨っているのは 3 次の共鳴 $3\nu_x = 64$ と $\nu_x + 2\nu_y = 64$ であり、これらは六極磁場によって励起されるものである。この 2 本の共鳴は、4 台の六極電磁石に巻いてある補助コイルにそれぞれ独立に電流を流し補正六極磁場を加えることで、同時に補正をしている。

本報告では FX 運転でのビームロスに寄与し得る共鳴について、それぞれ評価・対策を論じていく。

2. FX 運転での各共鳴とビームロスとの関係

2.1 動作点の設定

MR では水平・鉛直方向の動作点を 0.01 の幅でスキャンして実験的に最もビームロスが少ない設定で FX 運転を行っている。2021 年までの運転では入射から出射までの全期間において動作点を $(\nu_x, \nu_y) = (21.35, 21.43)$ に固定して行っていた。しかしながら 2022 年の高繰

* takaaki.yasui@kek.jp

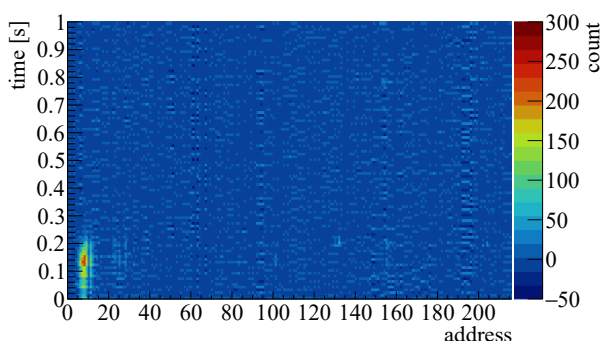


Figure 2: Beam losses in FX 800 kW operation measured by proportional beam loss monitors. Horizontal axis denotes attributed address in the ring and the vertical denotes the time from the beam injection.

繰り返しアップグレードの後には、動作点を固定してしまうと加速の初段で大きなビームロスが観測されるようになった。入射期間での動作点の最適値もスキャンの結果垂直方向に 0.04 下げの方がビームロスが減る結果となり、ビーム入射から 3.38 GeV までは動作点を $(\nu_x, \nu_y) = (21.35, 21.39)$ に設定し、そこから 30 ms かけて $(\nu_x, \nu_y) = (21.25, 21.41)$ へと移動させるパターンで現在は運転を行っている。Figure 2 は現在の FX 800 kW 運転におけるビームロスモニタのカウンタを示している。スキャンの結果、動作点を $(\nu_x, \nu_y) = (21.25, 21.41)$ へと移動した後はほぼビームロスを起こさなくなった。

高繰り返しアップグレード前後で最適な動作点が変わったのは非構造共鳴が強化されたからだと考えられる。動作点を加速中に水平方向に下げる必要が出てきたのは 3 次共鳴 $3\nu_x = 64$ の影響だと推察される。MR においてチューンシフトは空間電荷効果の影響が支配的であり、Fig. 1 のチューン拡がり分布は加速と共に急速に縮む。その結果非常に多くの粒子が 3 次共鳴 $3\nu_x = 64$ の影響を受けるようになる。入射期間において動作点を垂直方向に下げる方がビームロスが減ったのは半整数共鳴 $2\nu_y = 43$ あるいは 3 次共鳴 $\nu_x + 2\nu_y = 64$ の影響だと推察される。

高繰り返しアップグレード後に非構造共鳴が強化された理由の候補はいくつかある。当初心配されていたことは、四極電磁石の配線変更の影響である。アップグレード前は、3 回対称な位置に置かれた四極電磁石は全て同一電源を用いて通電されていたが、アップグレード後は一部の四極電磁石について異なる電源を使用するようになった。しかしながら、現在ではビーム光学系の測定の高精度化が進み、各電磁石の個体差がエラーの主要因となるところまで電源の設定値としては追い込めるようになった [3]。またアップグレード前後で 3 次共鳴補正に必要な補正六極磁場の最適値がほとんど変化しなかったこともあり、配線変更によって非構造共鳴が強化されたと考えづらい。別の可能性としては偏向電磁石電源の電流リップルがある。MR では電源 2 台で 1 つの曲線部の偏向電磁石の通電を行っており、電源間の電流値が異なればビーム光学系の 3 回対称性は崩れる。高繰り返しアップグレード直後は一部の電源について電流リップルが大きく、偏向磁場のリップルが dispersion のある所で水平方向の振動を作り、六極磁石による六極磁

場と合わさって時間変動する四極磁場成分を生み出してしまい、この大きさが無視できない程度に大きいことが指摘されていた [4]。現在はノイズ対策が行われ偏向電磁石電流リップルは大きく抑えられたため [5]、アップグレード直後よりも非構造共鳴の影響も小さくなっていると考えられる。実際アップグレード直後はビームロスの観点からも FX 750 kW 運転は厳しい状況であったが、現在 800 kW 運転を安定して行えるようになったのは非構造共鳴の抑制の効果があるからであろう。しかしアップグレード前と比較するとまだ非構造共鳴の影響が大きい可能性がある。さらに加速初段においては、偏向磁場が 0.1% 程度系統的にずれていることが観測されており、チューンのずれ及び 3 回対称性の悪化の要因となりビームロスを引き起こしてしまっていると考えられる。

2.2 空間電荷効果が励起する 8 次構造共鳴

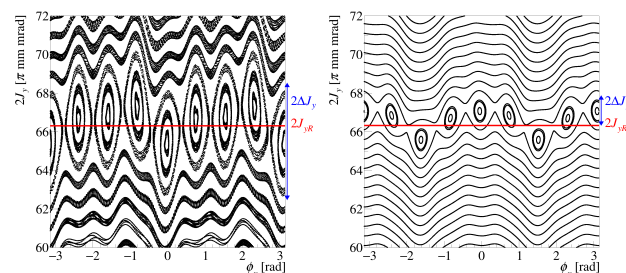


Figure 3: Poincaré map in the vertical action-angle coordinate with the present (left) and new (right) beam optics [2].

シミュレーションでは電磁石の設置誤差・磁場勾配誤差がない条件下でもビームロスが起こると予測されている。このシミュレーションでは RMS エミッタンス自体はほぼ増大が見られないので、ビームのハローに作用する共鳴がロスの原因となる。Figure 3 左は現在のビーム光学系において、線電荷 $\lambda = 4.86 \times 10^{11} \text{ m}^{-1}$ (8 バンチで 2.6×10^{14} ppp の大強度ビームに相当)、chromaticity $\xi_x, \xi_y \simeq -7, J_x = 0$ の条件で on-momentum 粒子についてトラッキングをして描いたポアンカレマップである。J-PARC MR では $2J_x \sim 2J_y \sim 60\text{--}65\pi \text{ mm mrad}$ にコリメータを設置してビームロスの局所化を行っているが、この action の領域に 8 つの共鳴の島が現れている。これは空間電荷効果が励起する 8 次構造共鳴 $8\nu_y = 171$ によるものであり、この電磁石の誤差のない条件では共鳴 $8\nu_y = 171$ がビームロスの主要因となる。共鳴の幅 (図中の青矢印) は $2\Delta J_y = 6\pi \text{ mm mrad}$ ある。

一般には動作点は構造共鳴を避けられる点を選ぶべきである。しかし MR のようにたった 3 回の対称性しかないシンクロトロンでは高次の構造共鳴は避けきれず、実際 MR ではどのように動作点を取っても 8 次構造共鳴の影響を受けてしまう。8 次の共鳴も原理的には補正磁石を用いて対処できないが、必要となるのがあまり一般的ではない 16 極電磁石であり、構造共鳴であるためそれなりの大きさの磁場が要求され、1 つの共鳴を補正するのに各 superperiod ごとに 2 台、計 6 台必要となる。J-PARC MR では補正磁石をインストールする代わりに、共鳴の強さが位相進みに依存することに着目し、動作点は固定したままビーム光学系を変更することでビームロ

スの主要因である $8\nu_y = 171$ を弱めることを考えた [2].

今回の対象が y 方向の共鳴であり、かつ x 方向については曲線部を achromat にしているため、 y 方向の位相を大きく変えることを考えた。空間電荷効果はリング全周に渡って現れるので、ビーム光学系を大きく変化させる必要があったので、 y 方向の曲線部の位相進み $\Delta\psi_{y,arc}$ をスキャンし、シミュレーションでビームロス、また付録 A にある空間電荷ポテンシャル $U_{0,8,171,s.c.}$ の計算を行った。動作点は変えないように直線部の位相進みは $\Delta\psi_{y,straight} = 2\pi\nu_{y0}/3 - \Delta\psi_{y,arc}$ とした。ただし 3 は superperiod の数である。シミュレーションと解析計算の結果、最もビームロスが抑えられるビーム光学系と空間電荷ポテンシャル $U_{0,8,171,s.c.}$ が小さくなるビーム光学系は一致し、これを新ビーム光学系として採用した。

Figure 3 右は新ビーム光学系を用いて描いたポアンカレマップであり、共鳴の幅は $2\Delta J_y = 2\pi$ mm mrad となり、確かに $8\nu_y = 171$ は弱められたことが分かる。またビームロスを実測した結果、ビーム入射から 130 ms の範囲でのロスが現在のビーム光学系では 0.60% であったのが、新ビーム光学系では 0.50% へと減少した [2].

2.3 六極磁場が励起する 3 次非構造共鳴

現在 MR では六極磁場が励起する 3 次非構造共鳴 $3\nu_x = 64, \nu_x + 2\nu_y = 64$ を 4 ケ所で補正六極磁場を加えることで補正をしているが、さらにビームロスを抑えるためには off-momentum 粒子についても同共鳴を補正する必要があるのではないかと議論されている [6]。本節ではこれらの 2 共鳴が影響を及ぼす action の範囲を付録 A の式を用いて計算した結果を記す。

Figure 4 は六極磁場を補正する前の 2 共鳴が影響する範囲を示している。ここで各領域の中心線は共鳴の島の中心 $(2J_{xR}, 2J_{yR})$ を表している。これは Fig. 3 での赤線に相当する。そして中心線から伸びる多数の線は共鳴の島の幅 $(2\Delta J_x, 2\Delta J_y)$ を表している。Figure 3 では青矢印に相当する。一般に共鳴 $m_x\nu_x + m_y\nu_y = n$ の影響を受けた粒子は $m_x\nu_y - m_y\nu_x$ が一定になることが知られているが、これらの線の向きはそれを踏まえた上での粒子の action が変化する向きを表している。

ポテンシャルの見積もりは実際に FX 運転で補正コイルに印加している電流値を用いて評価した。また各ビーム条件は FX 800 kW 運転での値を用いた。動作点は $(\nu_x, \nu_y) = (21.35, 21.39)$ 、線電荷は $\lambda = 4.38 \times 10^{11} \text{ m}^{-1}$ 、エミッタンスは $(\varepsilon_x, \varepsilon_y) = (3.48\pi, 3.95\pi) \text{ mm mrad}$ 、chromaticity は $\xi_x \sim \xi_y \sim -15$ とした。Figure 4 を見ると、on-momentum 粒子については、 $\nu_x + 2\nu_y = 64$ の影響は受けるものの、 $3\nu_x = 64$ の影響はほとんど受けない(受ける前にリングコリメータで回収される)ことが分かる。しかし δ が負の off-momentum 粒子については、2 共鳴ともビームのコアにもハローにも多大な影響を及ぼしていることが分かる。実際補正コイルを用いないとビームは数割程度もロスしてしまう。この結果から、実は現在の補正六極磁場の値も δ が負の off-momentum 粒子を補正する値になっている可能性がある。

Figure 5 は補正六極磁場を加えた際の共鳴の影響範囲を示している。ただしこの計算では、補正六極磁場

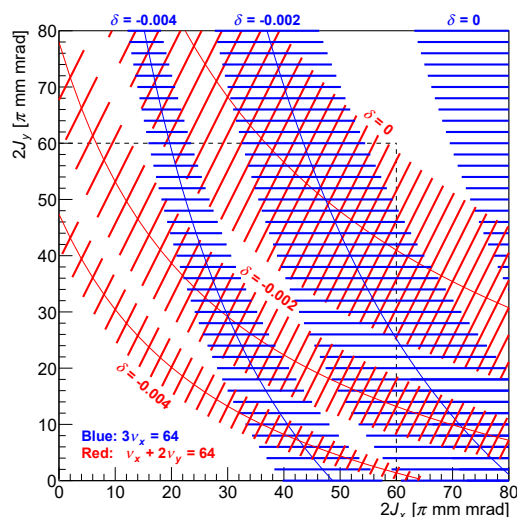


Figure 4: The regions of actions influenced by $3\nu_x = 64$ (blue) and $\nu_x + 2\nu_y = 64$ (red) when correction sextupole fields are not applied.

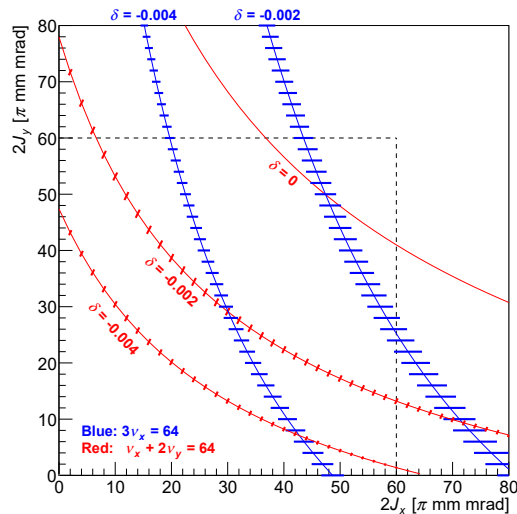


Figure 5: The regions of actions influenced by $3\nu_x = 64$ (blue) and $\nu_x + 2\nu_y = 64$ (red) when the resonance driving term of on-momentum particle was compensated.

は on-momentum 粒子の Resonance Driving Term (RDT) を補正していると仮定し、off-momentum 粒子に対する共鳴のポテンシャルは off-momentum 粒子の位相進みと FX 運転で印加している磁場から見積もった。補正磁場を加えているので Fig. 4 と比較すると共鳴はよく抑制されていることが分かるが、off-momentum 粒子については依然影響が残っていることが分かる。

様々な δ を持つ粒子に対して 3 次非構造共鳴の影響を抑えるために、MR では六極磁場をかけられる位置を増やすことを検討している。各六極磁石には既に補助コイルは巻かれているため、通電するための独立電源を確保する予定である。シミュレーションでは 24 ケ所で補正六極磁場をかけられるようにすることで $3\nu_x = 64, \nu_x + 2\nu_y = 64$ はほぼ完全に抑制できるとの結果が出ている [6].

2.4 空間電荷効果が励起する非構造共鳴

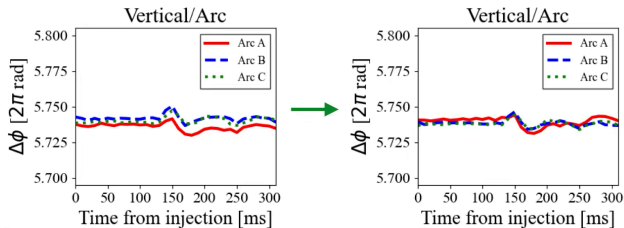


Figure 6: Phase advances in the arc sections before and after the optics correction [7].

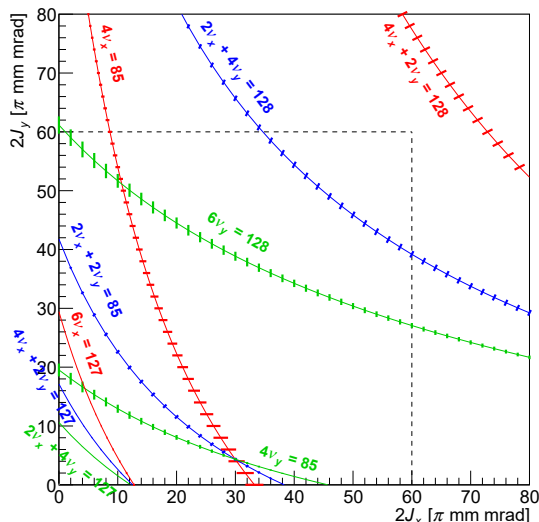


Figure 7: The regions of actions influenced by space-charge-driven nonstructure resonances up to sixth order.

前節の六極磁場が励起する 3 次非構造共鳴以外にも、非構造共鳴としては空間電荷効果が励起するものが無数にある。MR ではビーム調整時に 3 回対称性の精度向上のためビーム光学系補正をよく行うが、これでビームロスが 2 割程度減少したこともある。そのときの位相進みを示したのが Fig. 6 であり、3 つの曲線部の y 方向の位相進みが補正でより良く一致したことが分かる。ビーム光学系補正前の段階で補正六極磁場は最適化されており、そもそもリング全周に誤差六極磁場があることで励起される共鳴は位相の 3 回対称性が確保されても RDT の大きさのオーダーは変わらないので、これは空間電荷効果が励起する非構造共鳴が抑制されたと解釈できる。

Figure 7 はビーム光学系補正前について、空間電荷効果が励起する非構造共鳴の影響範囲を示している。ビームの条件としては FX 800 kW 運転のもので前節と同じである。図を見る限り共鳴の幅が大きいものはないものの、 $6\nu_y = 128$ がリングコリメータ設定の $2J_y \sim 60\pi$ mm mrad 周辺に島を作る共鳴であるため、影響が大きいと予想される。実際 $6\nu_y = 128$ が作る共鳴の島の幅は、補正前は $2\Delta J_y = 2.9\pi$ mm mrad であったが、補正後は $2\Delta J_y = 2.0\pi$ mm mrad へと確かに縮小した。

2.5 空間電荷効果が励起する 4 次構造共鳴

2.1 節で記したようにチューンスキャンの結果動作点を $(\nu_x, \nu_y) = (21.35, 21.39)$ へと y 方向に下げたため、差共鳴の重要度が従来より増した。空間電荷効果は非対

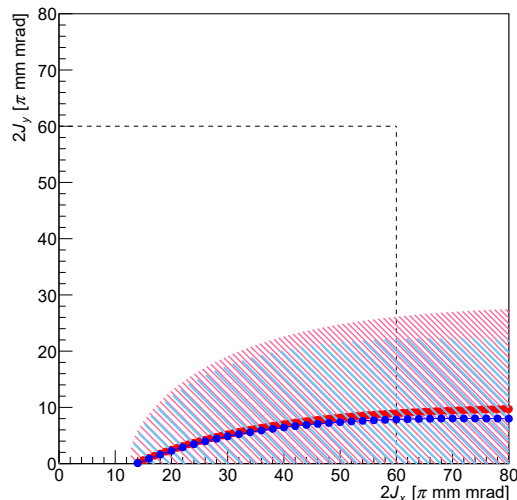


Figure 8: The regions of actions influenced by the resonance $2\nu_x - 2\nu_y = 0$ without (red) and with (blue) octupoles. The circles denote the centers of the resonance islands (J_{xR}, J_{yR}) .

称な分布でない限りは偶数次の共鳴のみ励起するため、 $2\nu_x - 2\nu_y = 0$ としてビームに影響を及ぼす。Figure 8 の赤線は空間電荷効果によって励起された $2\nu_x - 2\nu_y = 0$ が影響を及ぼす範囲を示している。 $2\nu_x - 2\nu_y = 0$ が広い範囲に影響を及ぼし、エミッタンス増大及びビームロスに寄与している可能性を示唆している。MR にはこの 4 次の構造共鳴を抑制するため、八極電磁石が superperiod ごとに 2 台、計 6 台設置されている。3 回対称性を維持しながら八極磁場のスキャンをビームロスベースで行った結果、ビームロスの減少が見られたので、2024 年現在は八極電磁石を使用して FX 運転を行っている。八極磁場を入れた際の共鳴の影響範囲も同じように計算し、結果を Fig. 8 の青線で示した。赤線と比較すると $2\nu_x - 2\nu_y = 0$ の影響範囲が狭まっていることが分かり、ビームロス減少と一貫性のある結果となった。

八極電磁石の最適値については、調整時間が限られていたためまだ最適化の余地があると思われる。解析計算から八極磁場の最適解を予測できると調整方針が立てやすいが、これには様々な障壁がある。そもそも八極磁場が作る共鳴のポテンシャルと空間電荷効果が作る共鳴のポテンシャルの関数形は異なる。これは空間電荷効果のより高次の成分も $2\nu_x - 2\nu_y = 0$ を励起するからである。したがって空間電荷効果が励起した $2\nu_x - 2\nu_y = 0$ の完全な補正は八極磁石では原理的にできない。もちろん八極磁場を加えることである範囲の action については共鳴の影響は抑えられるので八極磁場を用いること自体は有用ではあるのだが、ビームロスを最小限にする値を解析的に予測することは難しい。さらに八極磁場はチューンシフトを作るので議論がより複雑になる。Figure 8 で八極磁場の有無で共鳴の島の中心 (J_{xR}, J_{yR}) が異なっているのはチューンシフトが原因である。またビームコアからハローまで幅広く影響があるので、線電荷を絞った議論をして良いかについても自明ではない。このように解析計算からは八極磁場の最適値の予測は難しいものの、トラッキングシミュレーションではビームロスを最も抑

えられる解は求まるはずなので、今後はシミュレーションを用いて八極磁場の最適値を見積もる予定である。

また 2.2 節で紹介した新ビーム光学系を用いると $8\nu_y = 171$ だけでなく $2\nu_x - 2\nu_y = 0$ も抑制できることが計算されているので、 $2\nu_x - 2\nu_y = 0$ の観点からも新ビーム光学系の適用を薦めたい。

2.6 誤差磁場が励起する差共鳴

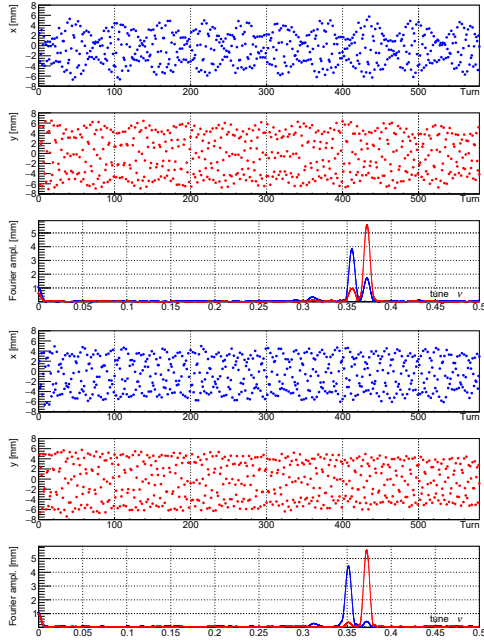


Figure 9: Turn-by-turn horizontal and vertical beam positions and their Fourier amplitudes (horizontal results are shown as blue lines and vertical as red lines) before (top three panels) and after (bottom three panels) applying skew quadrupole magnetic fields.

空間電荷効果が励起する $2\nu_x - 2\nu_y = 0$ だけでなく、主に四極磁石の回転誤差に起因する差共鳴 $\nu_x - \nu_y = 0$ の影響もあるはずである。動作点をさらに y 方向に 0.02 下げた $(\nu_x, \nu_y) = (21.35, 21.37)$ において 1×10^{12} ppp の低強度 1 パンチビームを x, y 方向に入射軌道エラーをつけてビームを入射した際のターンバイターンのビームの位置及びその Fourier 解析を示したのが Fig. 9 の上 3 図である。ビーム位置のデータから xy 方向にビームがカップリングしていることが見て取れ、Fourier 解析結果からも x 方向に $\nu_y \cdot y$ 方向に ν_x に相当する周波数にスペクトルが立っており、差共鳴の影響が確かであることを示している。

そこで MR に設置されている Skew 四極電磁石 2 台を用いて共鳴 $\nu_x - \nu_y = 0$ の補正を試みた。スキャンの結果が Fig. 9 の下 3 図であり、 xy カップリングは見えなくなり、 $\nu_x - \nu_y = 0$ によるスペクトルも大幅に小さくなり、 $\nu_x - \nu_y = 0$ が大幅に抑えられたことが分かる。

このときの Skew 四極電磁石の値を用いて FX 800 kW 相当の大強度 (2.3×10^{14} ppp) でビームロスを確認したところ、ビームロスはむしろ増えてしまう結果となった。ビームロス増大の解釈としては、ビーム分布が非対称で空間電荷効果によっても $\nu_x - \nu_y = 0$ が励起されていた

可能性が考えられる。ビーム分布が非対称な場合、低強度と大強度で $\nu_x - \nu_y = 0$ の強さも変わるため、低強度での Skew 四極磁場の最適値が却って大強度では悪影響を及ぼす可能性はある。

3. 結論

J-PARC MR の FX 運転ではビームは様々な共鳴の影響を受けるので、各共鳴ごとに対策を施している。空間電荷効果が励起する 8 次構造共鳴 $8\nu_y = 171$ に対しては新ビーム光学系を適用し、六極磁場によって励起される 3 次の非構造共鳴 $3\nu_x = 64, \nu_x + 2\nu_y = 64$ については補正六極磁場を増やし、空間電荷効果が励起する非構造共鳴に対しては 3 回対称性に注意してビーム光学系を補正し、空間電荷効果が励起する 4 次構造共鳴 $2\nu_x - 2\nu_y = 0$ に対しては新ビーム光学系の適用及び八極電磁石の最適化を行う。

謝辞

J-PARC MR 関係者の皆様には実験の承諾及び多大なご協力を頂きましたことを感謝申し上げます。

付録 A. 空間電荷効果の計算

動作点が (ν_{x0}, ν_{y0}) のとき、共鳴 $m_x\nu_x + m_y\nu_y = n$ に乗る粒子は、インコヒーレントチューンシフト $\Delta\nu_u$ ($u = x, y$) が $m_x(\nu_{x0} + \Delta\nu_x) + m_y(\nu_{y0} + \Delta\nu_y) = n$ を満たすものである。インピーダンスを考えなければ、 $\Delta\nu_u$ は色収差によるもの、六極磁場の amplitude dependent tune shift、空間電荷効果によって決定される。ビーム分布として 2 次元ガウシアンを考えれば

$$U_{m_x, m_y, n, \text{s.c.}} = \frac{\lambda r_0}{2\pi\gamma_{\text{rel.}}^3 \beta_{\text{rel.}}^2} (-1)^{\frac{m_x + m_y}{2}} \times \oint ds e^{i[m_x \chi_x + m_y \chi_y - (m_x \nu_{x0} + m_y \nu_{y0} - n)2\pi s/C]} \times \int_0^\infty dq \frac{e^{-w_x - w_y} I_{m_x/2}(w_x) I_{m_y/2}(w_y)}{\sqrt{2\sigma_x^2 + q} \sqrt{2\sigma_y^2 + q}},$$

$$\Delta\nu_{u, \text{s.c.}} = \frac{\partial U_{0,0,0, \text{s.c.}}}{\partial J_u}$$

のように計算することで空間電荷効果によるインコヒーレントチューンシフト $\Delta\nu_{u, \text{s.c.}}(J_x, J_y)$ を計算できる [2, 8]。ただし β_u はベータトロン関数、 σ_u は rms ビームサイズ、 λ は線電荷、 r_0 は粒子の古典半径、 $\gamma_{\text{rel.}}, \beta_{\text{rel.}}$ はローレンツ因子、 $\chi_u = \int ds/\beta_u$ は位相進み、 C は周長、 $I_\nu(z)$ は変形ベッセル関数、 $w_u = J_u \beta_u / (2\sigma_u^2 + q)$ とした。よって共鳴に乗る粒子の action (J_{xR}, J_{yR}) を解析的に計算できる。共鳴の幅については、

$$\Lambda = m_x^2 \frac{\partial^2 U_{0,0,0}}{\partial J_x^2} + 2m_x m_y \frac{\partial^2 U_{0,0,0}}{\partial J_x \partial J_y} + m_y^2 \frac{\partial^2 U_{0,0,0}}{\partial J_y^2}$$

$$\Delta J_u = 4m_u \sqrt{\frac{|2U_{m_x, m_y, n}|}{\Lambda}} \Big|_{J_x = J_{xR}, J_y = J_{yR}}$$

で計算できる [8]。

参考文献

- [1] S. Igarashi *et al.*, “Accelerator design for 1.3-MW beam power operation of the J-PARC main ring”, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2021**, 033G01 (2021). doi:10.1093/ptep/ptab011
- [2] T. Yasui and Y. Kurimoto, “Suppression of the eighth-order space-charge-induced resonance”, *Phys. Rev. Accel. Beams* **25**, 121001 (2022). doi:10.1103/PhysRevAccelBeams.25.121001
- [3] T. Asami, “Precise evaluation of quadrupole field errors by optics measurements in J-PARC MR”, Doctoral dissertation, The University of Tokyo, Tokyo, Japan, 2023.
- [4] T. Yasui, “J-PARC MR operation with the high repetition rate upgrade”, in *Proc. IPAC'23*, Venice, Italy, May 2023, pp. 1294–1298. doi:10.18429/JACoW-IPAC2023-TUXG1
- [5] Y. Morita *et al.*, “Correcting asymmetry of closed-orbit distortion in J-PARC main ring by reducing current ripples of main magnet power supplies”, in *Proc. IPAC'24*, Nashville, TN, US, May 2024, pp. 931–934. doi:10.18429/JACoW-IPAC2024-TUAD2
- [6] H. Hotchi *et al.*, “Numerical simulation study towards 1.3-MW beam operation at J-PARC MR”, in *Proc. IPAC'23*, Venice, Italy, May 2023, pp. 2316–2319. doi:10.18429/JACoW-IPAC2023-TUPM055
- [7] T. Asami, Private communication.
- [8] K. Ohmi and K. Sonnad, “Beta function measurement and resonances induced by space charge force and lattice magnets”, in *Proc. IPAC'16*, Busan, Korea, May 2016, pp. 641–643. doi:10.18429/JACoW-IPAC2016-MOPOR019