

## MITIGATION OF POWER LOSS DUE TO SKIN EFFECT

Yoshihisa Iwashita<sup>1</sup>

Kyoyo University

Gokanoshō, Uji, Kyoto, 611-0011

### Abstract

The AC current flows only on the metal surface, which is known as skin effect. The current concentration on the surface increases power loss. This results higher transmission loss of cable and degradation of Q in cavities. Skin effect on a metal foil that is thinner than a skin depth is investigated starting from general derivation of skin depth on a bulk conductor. The reduction of the power loss due to the skin effect with multi-layered conductors is reported and discussed. A simple application on a dielectric cavity is presented.

## 表皮効果に起因する損失の低減

### 1. はじめに

交流電流は表皮効果により導体の表面のみに集中することが知られている。このため高周波においては電流密度、電力損が上がり、ケーブルでの電力伝送や、共振空洞のQ値の低下をまねく。導体薄膜の積層構造を用いるとこの表皮効果による損失低減が可能であることが報告されている[1]。ここでは、このような構造の一解析方法を説明し、その応用として、誘電体空洞に適用した際の解析結果を示す[2]。

### 2. 半無限空間での表皮厚さの導出

電気伝導率  $\sigma$  ( $\gg i\omega\epsilon$ )の物質中での電磁界はアンペールの法則より、以下のように記述できる：

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + i\omega\epsilon)\mathbf{E}. \quad (1)$$

Fig. 1のようにそれぞれ半無限の空間と導体と考えると、導体中の電流分布は以下ようになる。

$$\partial_x^2 j = i\omega\mu\sigma j, \quad j = \sigma E_y. \quad (2)$$

これは、 $\sigma \gg i\omega\epsilon$ の条件下で以下のように解ける。

$$j(x) = j_0 e^{-(1+i)x/\delta}, \quad \delta = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}, \quad (3)$$

ここで、 $\delta$ は表皮厚さである。 $\nabla \times \mathbf{E}$ が一成分 $\partial_x E_y = \partial_x j/\sigma$ のみを持つならば、導体内の磁場はFaradayの法則 $\partial_x E_y = -i\omega\mu H_z$ から以下ようになる。

$$H_z(x) = \frac{\partial_x E_y}{-i\omega\mu} = \frac{\partial_x j}{-i\sigma\omega\mu} = \frac{\delta^2 \partial_x j}{-2i} = \frac{\delta}{2}(1-i)j(x). \quad (4)$$

この $j(x)$ は導体表面上の磁場 $H_z(0)$ を使って書ける。

$$j(x) = (1+i)/\delta H_z(0) e^{-(1+i)x/\delta}. \quad (5)$$

ちなみに銅における表皮厚さ $\delta$ は周波数3GHzではおよそ $1\mu\text{m}$ である。電流密度 $j$ の $x/\delta$ 依存性をFig. 2に示す。導体中の全電流は電流密度 $j$ を積分して、

$$J = \int_0^\infty j dx = H_z(0). \quad (6)$$

となる。また、導体中の電力損は次のようになる。

$$P_{bulk} = \int_0^\infty |j|^2 / \sigma dx = \frac{H_z(0)^2}{\sigma\delta} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} H_z(0)^2, \quad (7)$$

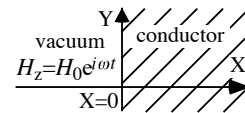


Fig. 1 Half of the space is filled by conductor.

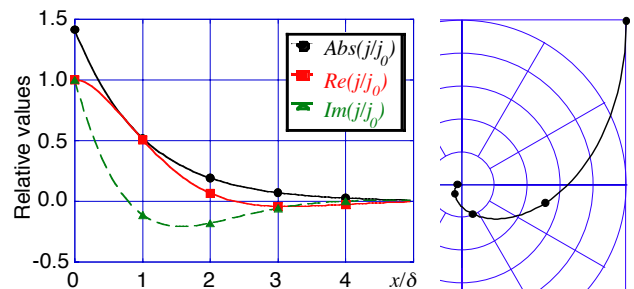


Fig. 2 Left:  $j$  as a function of  $x/\delta$ . Right: polar plot. Markers are put in every unit.

ここで、 $1/\sigma\delta$ は表皮抵抗 $R_s$ と呼ばれる。損失を減らすためには電気伝導率の向上が有効であるが、一方、電流密度が上昇するため、その効果は限定的になる。もし、この電流密度を電気伝導率と独立に制御できれば高周波損失を減らせると期待できる。

### 2. 薄膜における表皮効果

厚さが $\alpha\delta$ の導体薄膜が左右大きさの異なる高周波電磁場中に置かれた場合について考えてみよう (Fig. 3)。(2)式の解は以下ようになる。

$$j(x) = H_z(0) \left( j_f e^{-(1+i)x/\delta} + j_b e^{-(1+i)(\alpha\delta-x)/\delta} \right), \quad (8)$$

$$j_f = \frac{(1+i)e^{(1+i)\alpha} (e^{(1+i)\alpha} - \xi)}{\delta(e^{2(1+i)\alpha} - 1)}, \quad j_b = \frac{(1+i)e^{(1+i)\alpha} (\xi e^{(1+i)\alpha} - 1)}{\delta(e^{2(1+i)\alpha} - 1)}.$$

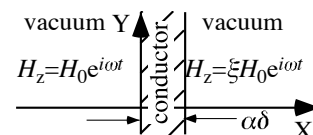


Fig. 3 The thickness is thinner than the skin depth.

<sup>1</sup> E-mail: iwashita@kyticr.kuicr.kyoto-u.ac.jp

磁場は紙面に垂直で薄膜中の電流は上下方向に流れる。Fig. 4左は両側の磁場強度が同じ場合の電流密度分布  $j(x)$  を複素表示したものである ( $\xi=1$ )。両表面からの電流分布が原点に対して対称であり、正味の電流はゼロであることがわかる。膜厚が薄くなるにつれて電流密度の深さ依存性は線形に近づいていく。また、例えば膜厚が表皮厚さ程度になると ( $\alpha=1$ )、裏からの相殺により虚成分が支配的になる。更に薄くなればこの虚勢分も漸減することがわかる。逆に厚くなれば、Fig. 2の振る舞いに近づいてゆく。

Fig. 4右は片側の磁場が一方の半分の時分布である。膜厚が厚い場合は両面の実電流の向きが逆になり電力損も大きい。表皮厚さ程度になると相殺のため、実電流は至る所正になり効果的に電流を運ぶことがわかる。どの厚さのもでも、実電流の積分値は  $H_z/2$  であり、虚成分の積分値はゼロとなる。

次に、厚さ  $\delta$  の薄膜が二枚並べてあり、それで仕切られた空間の磁場強度比が  $1 : 0.5 : 0$  となっている ( $\xi=0.5$ ) 状況を考えよう。それぞれの薄膜での複素電流密度分布はFig. 6のようになる。先ほど見たように、それぞれの薄膜の正味の電流は、実成分だけであつ、これらが表裏での磁場振幅の差となるため値が等しくなる。全消費電力はEq.7と同様に次のように計算できて半無限導体の場合の7割程度となる。

$$P_2 = \int_0^{\delta} (|j_1|^2 + |j_2|^2) / \sigma dx, \quad (9)$$

ここで、はじめの層の厚さと、電流(磁場)比  $\xi$  を最適化すれば、最小値として、67.9% が  $\alpha=0.826$ 、 $\xi=0.498$  のときに得られる。さらに、最後の層 (この場合二番目の層) の厚さが十分厚ければ、65.6% が  $\alpha=0.785$ 、 $\xi=0.534$  のときに得られる。

一般に、同一厚の  $n$  層を用い、各層に同じ電流を振り分けると、全消費電力は、以下で計算できる。

$$P_n = \sum_{i=1}^n \int_0^{\delta} |j_i|^2 / \sigma dx. \quad (10)$$

各層の厚さや電流配分を最適化するのが理想的であるが、製作のコストを考えると、上記のように、全て同一である方が実用的であろう。Fig. 7 左は層数を変えた場合の、消費電力の膜厚依存性である。消費電力が最小になる膜厚は、層数の増加によって薄くなることがわかる。その最小値を層数でプロッ

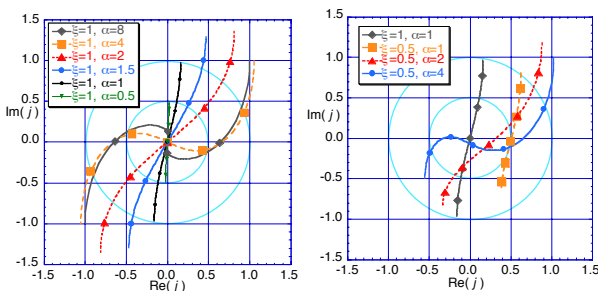


Fig. 4 Polar plots of complex current densities. The markers are at centers of every 1/5 layers in depth:  $x=0.1\delta, 0.3\delta, \dots, 0.9\delta$  (current densities are normalized by  $H_0/\delta$ ). Left: equal amplitudes on both side ( $\xi=1$ ), Right:  $\xi=0.5$

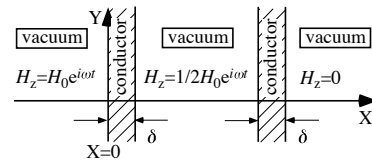


Fig. 5: Two conductor layers are immersed in stepped RF fields: 100%, 50%, and 0%.

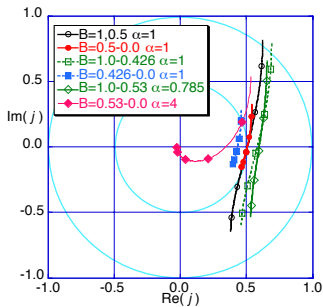


Fig. 6: Polar plots of pairs of complex currents in Fig. 5.

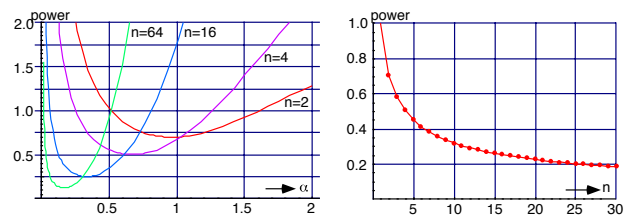


Fig. 7: Left: Relative power losses as functions of thickness, (normalized by the bulk case). Right: Minimum loss as a function of the number of layers.

トしたのが右図であり、1/2乗の依存性を持つ。これは (10) 式をテーラー展開しても確認できる。

かくて、表皮効果による高周波電力損も、積層薄膜構造をとり、電流配分を適切にすることにより低減できることがわかった。この改善は、あくまでも、これまでの議論が成り立つ範囲のみで有効であり、例えば、表皮厚さが固体の格子間隔以下になるような極端に高い周波数では適用できないのは、言うまでもない。一方、Fig. 7 左からわかるように、損失が増すケースもあることがわかるが、このような領域も例えば、電磁シールドなどに有効となろう。

平面波が膜厚  $\alpha\delta$  の銅薄膜に垂直に入射した場合の透過率  $T$  はFig. 8 のようになる。極端に高い周波数でなければかなり薄くても透過率は十分小さい。つまり、薄膜の両側の電磁場は十分に分離され薄膜の外では干渉しない。一方、垂直入射でないと考えられる場合の適用例が文献[1]であるが、この例は薄膜間の誘電体の選択範囲が狭いという難があった。

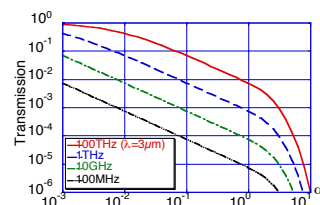


Fig. 8: Transmission through a thin conductor foil.

### 3. 薄膜を使った誘電体円筒空洞

TMモードの誘電体円筒空洞 (Fig. 9参照) において誘電率  $\epsilon_r$  が十分高ければ、円周端 ( $r=R$ ) での磁場はほとんどゼロとなる。この場合、電場  $E_z$  は以下のように Bessel 関数で表現できる。

$$E_z(r) = E_z(0) J_0(kr), \quad k = x_1'/R, \quad (11)$$

ここで、 $x_1'$  は  $J_0'(x)=0$  の最初の解である。誘電体中の変位電流は上下の導体の中央部に流入し、周辺部で再び誘電体中に戻る。導体上の表面電流は  $r_p$  ( $J_0'(kr_p)=0$  の最初の根) で最大となる。この領域に穴の空いた円板状の導体薄膜を導体から絶縁して設けると中央部に流入していた変位電流の半分程度をこの薄膜円板に入れるようにすることができる (Fig. 10参照)。円板の内径と外径を調節して流入する変位電流の総和をゼロにすることにより、薄膜と導体間に大きな電界が発生しないようにすれば元の電磁場分布を変えないようにできる。

$$\int_{r_1}^{r_2} \dot{D} 2\pi r dr = 0. \quad (12)$$

この式と、以下の電力損失  $P_1$  が極小値を取るという条件から、 $r_1$  と  $r_2$  が決定できる。

$$P_1 = \int_0^R \int_0^\infty \frac{|j_1|^2}{\sigma} dz 2\pi r dr + \int_{r_1}^{r_2} \int_0^\infty \frac{|j_2|^2}{\sigma} dz 2\pi r dr. \quad (13)$$

$P_1$  は  $r_1=0.261R$  及び  $r_2=0.921R$  で極小値をとり元の 70.5% となる。式(13)を解くのは複雑なので、かわりに次の式も悪い近似ではなかろう。

$$\int_0^{r_p} \dot{D} 2\pi r dr = 2 \int_0^{r_1} \dot{D} 2\pi r dr \quad \left( = 2 \int_{r_1}^{r_p} \dot{D} 2\pi r dr \right), \quad (14)$$

左辺は電流密度が最大となる半径での全電流であり、これを薄膜と元の導体で等分するという条件である。式(14)で与えられる  $P_1$  は  $r_1=0.322R$  かつ  $r_2=0.884R$  で元の 75.4% となる。少し最適値からずれるが層数が多くなれば簡単であるため有用になろう。

Fig. 11 は軸対称な体系での Q 値の向上の  $r_1/R$  依存性を示したものである。図から、半径を適当に選ぶことにより薄膜一枚追加するだけで Q 値が 4 割程度上がっていることがわかる。層数を増やせばさらに向上が期待できる。数値計算では導体抵抗を次のように複素誘電率 ( $\epsilon' - i\epsilon''$ ) に読み替えて計算を行った。

$$\sigma = i\omega(-i\epsilon'') \quad (15)$$

数値としては、 $(\epsilon', \epsilon'')=(1, 0.3477e9)$  を使っている。計算の条件はキャプションにまとめてあるが、計算時間短縮のため、空洞内の誘電率として 10000 というかなり大きい値を使っている。極めて薄い表皮厚

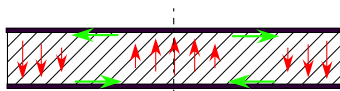


Fig. 9: Flat dielectric cylindrical cavity where the dielectric constant  $\epsilon_r$  is much larger than unity and the top and the bottom surfaces are covered by conductors.

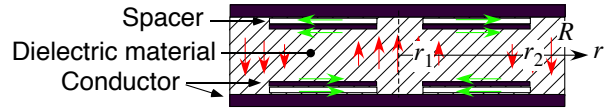


Fig. 10: Dielectric cylindrical cavity with extra electrodes that have washer shape. The thicknesses are exaggerated: inside of the each conventional disc electrode, one smaller washer shape electrode is located with a small distance from the disc.

さ ( $1\mu\text{m}$ ) をそれよりも数桁サイズの大きい誘電体空洞 ( $600\mu\text{m}$ ) の中で表現するには、メッシュを極めて細かく設定する必要があるが、誘電率を大きくして、空洞の半径を小さくすることによりメッシュ数の増大を緩和した。計算コードに対してこのような非現実的な値を入力して正しく動作するかは自明ではなかったが、得られた結果は、解析解の電磁場分布の積分から求めた値と傾向が一致するので正しい結果を得たと思っている。数値自身の不一致はまだメッシュサイズが大きいせいであると思われる。

ここで重要なのは、元の導体と薄膜間の部分の誘電率が空洞をなしている誘電体の誘電率よりも十分小さい必要がある事である。薄膜電極の幅は空洞内の半波長に近いので、もしこの誘電率が空洞本体内と同じなら、この部分に大きなエネルギーが入り込み、かえって損失を増大させることになる。

この構造をそのまま適用可能な分野も多いであろうが、加速構造に導入するには一工夫必要である。さらに斬新なアイデアが出てくることを願う。

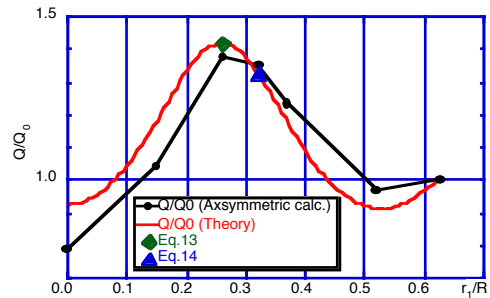


Fig. 11: Q enhancement as a function of  $r_1/R$ .

Dielectric constant of the body material:	10000
Tan $\delta$ of the dielectric material:	0
Thickness of the dielectric body:	400(200) $\mu\text{m}$
(Symmetry is used to reduce the CPU time)	
Radius of the dielectric body:	600 $\mu\text{m}$
Conductance:	58MS/m
Base conductor thickness:	8 $\mu\text{m}$
Thinner conductor thickness:	1 $\mu\text{m}$
Space between the conductors:	1 $\mu\text{m}$
Eigenfrequency:	$\sim 3\text{HGz}$

### 参考文献

- [1] J. Hattori, et al.: Low Profile Dielectric Band Elimination Filter using Thin Film Layered Electrode for 2GHz Band Cellular Base Station, IEEE MTT-S Digest 1999
- [2] <http://acelconf.web.cern.ch/AcelConf/I04/PAPERS/IHP4.3.PDF>