

Normal Mode Analysis of Linac Structures

高エネルギー物理学研究所 西川 哲治

I. Introduction

1960年代のLi-Acc (加速器一般)の研究は表1にあげたようにBeamの効果やTransientの現象とめぐって、とくにHigh-Energy, High-Intensity Proton Linacの開発などに関連した諸問題が一つ々の中心になって論ぜられていた。筆者が当時提案したNormal Mode Analysisは、これらの諸問題の多くを、Slaterが提唱したCavityのNormal Modeに展開して、統一的に扱おうとするものであった。この他にもEquivalent CircuitsやS-Matrixの方法などを提案した人もあったが、結局、わかれわかれのやり方が実験事実の多くをかなりよく説明したもので、最近も、いろいろと引用されている、利用されている理論体系の一つとして、ある成果を収めた。最近の例として、とくにCERNのM. Bellによる論文「Normal Mode Analysis of Standing Wave Lines and The New Linac」(CERN HPS/DL 75-3, 1975)などがあげられる。またわかれわかれの初期の研究の大部分はP.M. Lapostolle & A.L. Septier 編「Linear

第1表 1960年代の諸問題

- ① High Intensity
 - A. Beam Loading
 - Steady State
 - Transient State
 - B. Beam Instability
 - Static Limit
 - Dynamic Limit
 - Single Bunch
 - Multi Bunches
- ② Energy Problems → Field Problems
 - A. Standing Wave vs Travelling Wave
 - For $\pi, 0$ modes $\gamma_s(SW) = 2\gamma_s(TW)?$
 - Electron Linac TW型が成功
 - Proton Linac ($v < c$) SW型が望ましい
 - B. Transient Effects
 - Cavity Excitation (Wigglesの問題)
 - Short Bunch Accel. (NBS etc.)
 - Beam Loading Compensation

Accelerators」(North-Holland Pub. Co., 1970 p. 809 et) の筆者の著述に紹介してある。以下に紹介する式等のところこそオリジナルな文献はBNL Int. Rep. AADD 87⁽¹⁹⁶⁶⁾を参照されたい。

II Normal Mode Theory of Cavity Structures

$\rho = 0, \vec{j} = 0$ の真空中のMaxwell による電磁波の方程式は、 \vec{E}, \vec{H} と \vec{E}, \vec{H} と

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{E} = 0, \quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{H} = 0 \quad \vec{r} \text{ まで与える。}$$

Normal Modes は、 $\vec{E}, \vec{H} \propto e^{i\omega t}$ とおき、Cavity の境界が、次のどちらかの理想的な境界条件を満足して、 \vec{E}, \vec{H} を仮定して求められる。即ちそれぞれ $E \cdot \vec{n}$ または $\vec{H} \cdot \vec{n}$ と書くと、

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad \text{at } S, \quad \vec{n} \times \vec{H} = 0 \quad \text{at } S' \quad (\vec{n}: \text{外向法線}) \text{ である。}$$

従って Normal Modes $\vec{E}_n, \vec{H}_n, \omega = \omega_n$ に対する波動方程式は、

$$\Delta \vec{E}_n = \omega_n^2/c^2 \vec{E}_n \equiv k_n^2 \vec{E}_n, \quad \Delta \vec{H}_n = \omega_n^2/c^2 \vec{H}_n \equiv k_n^2 \vec{H}_n \quad \text{となる。}$$

$\vec{E}_n(\vec{r}), \vec{H}_n(\vec{r})$ は完全系をつくる。そこで時間的に一般な変化を許す場 $\vec{E}^*(\vec{r}, t), \vec{H}^*(\vec{r}, t)$ は、Normal Modes に展開して

$$\vec{E}^*(\vec{r}, t) = \sum_n \vec{E}_n \int_V \vec{E}_n^* \vec{E}_n = \sum_n V_n(t) \vec{E}_n(\vec{r}), \quad \vec{H}^*(\vec{r}, t) = \sum_n \vec{H}_n \int_V \vec{H}_n^* \vec{H}_n dV = \sum_n I_n(t) \vec{H}_n(\vec{r})$$

のようになる。ここで

$$V_n / I_n = \int_V \vec{E}_n^* \vec{E}_n dV / \int_V \vec{H}_n^* \vec{H}_n dV = -j \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} \quad (\text{真空中}) \quad (2)$$

II-a. Fundamental Equations for Imperfect Boundaries and Beam Effects

以上は理想的な境界の場合であるが、境界が不完全で、Wall Losses がある、外部回路との結合がある、ビームがあるような場合、これは ϵ -種々の Perturbation として扱い、展開係数を次のような式から与えられることが J.C. Slater によって示されている。即ち、実際の電場と磁場を $\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{H}(\vec{r}, t)$ とすると、 $\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_n V_n(t) \vec{E}_n$ と書いて

$$\frac{d^2}{dt^2} V_n + \omega_n^2 V_n = -c \omega_n \int_S (\vec{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{H}_n ds + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d}{dt} \left[\int_S (\vec{n} \times \vec{H}) \cdot \vec{E}_n ds - \int_V \vec{j} \cdot \vec{E}_n dV \right] \quad (3)$$

とあらわせる。右辺の第一項は Wall Losses, 第二項は External Coupling, 第三項は Beam Effects とあらわし、上のは理想的な系では 0 になる。同様な式は磁場 (I_n) に対して与えられる。

II-b Expressions for Wall Losses

境界 S が完全な導体でなく、有限の電気伝導度 σ をもつとき、その表面で電場と磁場は 45° 位相がずれて、 $\vec{n} \times \vec{E} = (1+j) \sqrt{\omega \mu / 2\sigma} \vec{H}$ で与えられる。ただし、 \vec{E} と \vec{H} を時間的には $e^{j\omega t}$ で変化すると考える。これは (3) 式の右辺第一項に与えられ、

$$c \omega_n \int_S (\vec{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{H}_n ds = c \omega_n (1+j) \sqrt{\omega \mu / 2\sigma} \int_S \vec{H} \cdot \vec{H}_n ds$$

今 n 番目の Mode が励起されるときのことを考えると、 $\vec{H} = \vec{H}_n \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}_n dV$ と表せるので、

$$\begin{aligned} &= c \omega (1+j) \sqrt{\omega \mu / 2\sigma} \int_S \vec{H}_n \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}_n dV = [\omega_n (1+j) \sqrt{1/2\sigma \mu \omega} \int_S \vec{H}_n^2 ds] j \omega \int_V \vec{E} \vec{E}_n dV \\ &= [\omega_n (1+j) \frac{\epsilon_0}{2} \int_S \vec{H}_n^2 ds] dV_n / dt = [\omega_n / Q_{0w}] (1+j) dV_n / dt \end{aligned} \quad (4)$$

と書き通せる。ここで 2 番目の変形では (2) 式を用い、また、四番目の式では表皮の厚さ δ と、無負荷時の Q -値 Q_0 に対する式

$$\delta = \sqrt{2/\sigma \omega \mu}, \quad 1/Q_{0w} \equiv \delta/2 \int_S \vec{H}_n^2 ds$$

を用いた。

II-c External Coupling

境界 S' が完全な Open ect. でなく、導波管を通して共振器や負荷と結合している場合、第二項を次のような仮定のもとで計算して評価できる。即ち (i) 導波管は単-Mode k で励起されていて、その電場と磁場の間には、このモードに対する特性インピーダンス Z_{0k} とし、

$$Z_{0k} \vec{h}_k = \vec{n} \times \vec{e}_k$$

が成立つとする。実際には多くの Modes が励起されるとしても、空洞とのつながり目から十分離れたところでは、他の Modes は減衰して単-Mode となるから、そのあたりには S' とは関係ない。

仮定 (ii) 共振器や負荷は Well-padded, 即ちここでは反射がなく、空洞から反射してきた電磁波は完全に吸収されるとする。そして、ここで、そのような Well-padded Generator によって、Cavity がどのように励起されるか、という問題を考えることにする。

よって (3) 式の右辺の第二項を評価するに \$S'\$ の \$\vec{H}\$ や \$\vec{E}_n\$ を導波管の Mode に展開して

$$\vec{n} \times \vec{H} = i(t) \vec{h}_k, \quad \vec{E}_n = U_n \vec{e}_k \quad (U_n: \text{real const}) \quad \text{と表す}$$

$$\int_{S'} (\vec{n} \times \vec{H}) \cdot \vec{E}_n \, ds = U_n i(t) / Z_{0k}$$

よって、こゝで空胴への入射波 \$i(t)\$ を

$$i(t) = H_0(t) (1-R) e^{j\omega t}, \quad R = \frac{Z - Z_{0k}}{Z + Z_{0k}} \quad (\text{反射係数}) \quad (5)$$

と表すと、共振器が Well-padded である限り、\$R\$、\$Z\$ は時間によらない係数となり、\$H_0(t)\$ は、入射波のパルス波形を与えることとなる。簡単のため、\$H_0(t)\$ は \$t=0\$ より以後のステップ関数とする。一方共振器側から空胴をみたインピーダンス \$Z\$ は、\$Z \vec{H} = \vec{n} \times \vec{E}\$ で与えられるので、\$\vec{E}\$ を空胴内の Modes で展開して、\$\vec{E} = \sum_{n'} \nabla_{n'} \vec{E}_{n'}\$ と書くと、\$Z i(t) = \sum_{n'} \nabla_{n'} U_{n'}\$ がえられる。(5)式から

$$(Z + Z_{0k}) i(t) = 2 Z_{0k} H_0(t) e^{j\omega t} = \sum_{n'} \nabla_{n'} U_{n'} + Z_{0k} i(t)$$

よって、\$R\$ を消去し、結局

$$i(t) = 2 H_0(t) e^{j\omega t} - 1/Z_{0k} \sum_{n'} \nabla_{n'} U_{n'} \quad (6)$$

と表わせる。従って External Coupling による項は

$$\frac{1}{\epsilon_0} \frac{d}{dt} \int_{S'} (\vec{n} \times \vec{H}) \cdot \vec{E}_{n'} \, ds = \frac{U_n}{\epsilon_0 Z_{0k}} \frac{d i(t)}{dt} = A U_n e^{j\omega t} - \frac{1}{U_n Q_{ext,n}} \sum_{n'} U_{n'} \frac{d U_{n'}}{dt} \quad (7)$$

と書ける。ただし \$A \equiv j 2\omega H_0 / \epsilon_0\$, \$1/Q_{ext,n} \equiv U_n^2 / \epsilon_0 \omega Z_{0k}\$ である。

II-d Equations for Cavity Excitation by a Well-padded Generator

以上をまとめると、入射磁場 \$H_0 e^{j\omega t} \vec{h}_k\$ で励起したときの空胴内の \$n\$ 番目の Mode の振動の方程式は、(7)式の右辺の \$n'\$ のうち、\$n'=n\$ の項は左辺へ移し、

$$\frac{d^2}{dt^2} U_n + (1+j)K_n \frac{\omega_n}{Q_n} \frac{d U_n}{dt} + \omega_n^2 U_n = A U_n e^{j\omega t} - \frac{\omega_n}{U_n Q_{ext,n}} \sum_{n' \neq n} U_{n'} \frac{d U_{n'}}{dt} \quad (8)$$

$$1/Q_n = 1/Q_{on} + 1/Q_{ext,n}; \quad K_n = Q_n/Q_{on}$$

と与えられる。これは Wall-Losses や External Coupling による効果を示す強制的振動の式である。こゝにはビームの効果はふくんでいないが、ビームと共振器の相互作用がなければ、ビームの効果による電磁場は独立に計算して、ベクトル的に加えればよい。また振幅 \$A\$ は時間によるが、Step 関数であれば、\$t=0\$ における初期条件として扱えばよい。

よって、今外から、\$n=l\$ の Mode に共振するような周波数 \$\omega_l' \approx \omega_l (1 - 1/2 Q_{ol})\$ で励起したとすると、共振 Mode (\$n=l\$) に対しては右辺の第 2 項は第 1 項に比べ無視してよい。また非共振 Mode (\$n \neq l\$) の場合は、第 2 項の \$\sum\$ のうち、\$n'=l\$ の項のみとって差支えない。よって、これをまとめると、\$n\$ 番目の Mode の展開係数 \$U_n\$ は

$$\frac{d^2}{dt^2} U_n + (1+j)K_n \frac{\omega_n}{Q_n} \frac{d U_n}{dt} + \omega_n^2 U_n = A U_n \exp(j\omega_l' t) - (1-\delta_{ln}) \frac{U_n \omega_l}{U_l Q_{ext,l}} \frac{d U_l}{dt} \quad (9)$$

で与えられる。

これより共振 Mode に対しては (\$n=l\$ の Order の項は無視して) よく知られた Build-up Curve

$$E_l e^{j\omega_l' t} \{ 1 - \exp[-(\omega_l'/Q_l)] t \} \quad (10)$$

が直ちにえられる。また非共振 Mode に對しては

$$jE_L \frac{\omega_L'^2}{Q_L(\omega_n'^2 - \omega_L'^2)} \frac{U_n}{U_L} e^{j\omega_L' t} \left[1 - \frac{Q_L}{Q_{ext,L}} \left(1 - e^{-\frac{\omega_L' t}{2Q_L}} \right) - e^{-\frac{\omega_n' t}{2Q_n}} e^{j(\omega_n' - \omega_L') t} \right] \quad (11)$$

がえられる。[]の中の第1項は強制振動による項、第2項はn番目の Mode の減衰時定数で減衰していく ω_L' と ω_n' のビートの項である。両式をみてわかるように、強制振動に対しては、共振 Mode と非共振 Mode では 90° 位相がちがう。これらの式から非共振 Mode の励起によって、位相のずれや Wiggles の生じるこゝがすぐわかる。なお、 $E_L = A U_L Q_L / \omega_L'^2$ である。

III. Applications to Linac Structures

Linac Cavity の Normal Modes は通常 TM_{01n} Modes であつて、その軸方向の成分は

$$E_n(z) = (E_0/\sqrt{\alpha_n}) \cos \frac{n\pi z}{L} \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

とあらわされる。Lは空洞の全長で、zは軸方向にはかゝた長さである。電子リニアックなどに用いられている Multi-cell Cavity では、各 Cell は TM₀₁₀ Mode で振動し、結合孔を通して Loosely に結合してゐると考えると、m番目の Cell に対し $z \rightarrow m L_0$ (L_0 :各セルの長さ) とおけばよい。また Drift-tube Cavity では、 $n=0$ が共振 Mode である。 α_n は Normalization Factor で、0-mode や π -mode などでは2、他の Modes では1である。各モードに對する結合係数 U_n は、Feeding Point の位置を z_f とすると、 $U_n \sqrt{\alpha_n} / U_L \sqrt{\alpha_L} = \cos \frac{n\pi z_f}{L} / \cos \frac{L\pi z_f}{L}$ で近似される。図-1 は Perturbation Method で測定した Drift-tube Cavity の軸上 Normal Mode Fields の一例を示す。

III-a. Steady-state Phase Shifts

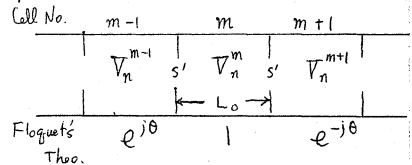
以上のような解析から 0-mode Drift-tube Cavity や π -mode Multi-cell Cavity には、いくつかの特長的な現象が見られ、測定とよく一致する。まず定常的な状態では、Drift-tube Cavity 軸上電場は

$$E(z,t) = E_0 \exp(j\omega_0' t) \left[1 + 2j \left(\frac{\omega_0'}{Q_{00}} \right) \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\pi z_f/L) \cdot \cos(n\pi z/L)}{\omega_n'^2 - \omega_0'^2} \right] \quad (13)$$

で与えられる。但し、 $E_0 = A E_0 U_0 Q_0 / (j\omega_0'^2 \sqrt{2})$ で $\omega_0' \omega_n' / Q_n \ll |\omega_n'^2 - \omega_0'^2|$ と仮定してゐる。第2項の非共振 Mode の寄与から、位相のずれが軸上に生じるこゝがわかる。これは 0-mode の電磁場は軸に沿つた Poynting Vector がなく、壁による損失等を打消すためには、 $n \neq 0$ の Near-by Modes の励起が是非必要に存するからである。空洞を中心 ($z_f = L/2$) で励起したとき、もっともきくのは $n=2$ の Mode である。(13) 式から予想される位相のずれと実験の比較を図2に示す。

π -mode Multi-cell Cavity でも同様で、この場合は、各セルは 0-mode で振動してゐると考え、終端から励起すると $\tan \phi(m) \propto (N-m)^2$ のような位相のずれが m 番目のセルにあらわれるこゝが予想され、実験的に確かめられている。ただし N はセルの全数である。Multi-cell Cavity の場合には、Floquet の定理を用い、壁の損失のあるときの Dispersion Curve が(3)式から求められる。

今 m 番目のセル(空洞)の n 番目の Mode に注目し、両隣りのセルとの結合孔を S' 面と考える。こゝで実際の \vec{E} , \vec{H} は、 $\vec{n} \times \vec{H} = \vec{E}/Z$ と書け、インピーダンス Z は結合孔で損失がなければ Inductive か Capacitive である。



II-b のときと同様に \$n\$ 番目の Mode のみ励起されていると考へ、定常状態であるから時間的には \$e^{j\omega t}\$ で変化しているとする、\$S'\$ における Coupling Integral の項は次のように評価できる。

$$\frac{1}{\epsilon_0} \frac{d}{dt} \int_{S'} (\vec{n} \times \vec{H}) \cdot \vec{E}_n ds = \frac{j\omega}{\epsilon_0 Z} \int_{S'} \vec{E} \cdot \vec{E}_n ds = \frac{j\omega}{\epsilon_0 Z} \int_{S'} \vec{E}_n^2 ds \int_V \vec{E} \cdot \vec{E}_n dv = \frac{j\omega}{\epsilon_0 Z} \int_{S'} \vec{E}_n^2 ds \times \frac{1}{2} \{ (\vec{V}_n^{m-1} + \vec{V}_n^m) + (\vec{V}_n^m + \vec{V}_n^{m+1}) \} = \left[\frac{j\omega}{\epsilon_0 Z} \int_{S'} E_n^2 ds \right] V_n^m (1 + \cos \theta)$$

ここで \$S'\$ における電場 \$\vec{E}\$ の展開係数は、相隣れるセルの \$\int_V \vec{E} \cdot \vec{E}_n dv\$ の平均をとった。また \$\theta\$ は各セルごとの位相差で、セルの長さを \$L_0\$ とし、\$\theta = kL_0\$ とかける。\$\gamma = \tau\$ 再び (3) 式に代入し、\$V_n^m\$ は \$e^{j\omega t}\$ に比例するとおくと、Dispersion Relation

$$\omega_n^2 - \omega^2 - (1-\gamma) \frac{\omega \omega_n}{Q_0} = B (1 + \cos kL_0) \quad ; \quad B = \frac{j\omega}{\epsilon_0 Z} \int_{S'} \vec{E}_n^2 ds \quad (14)$$

がえられる。\$B\$ は \$B/\omega\$ が Band Width に相当する係数で、Inductive 結合なら正、Capacitive 結合なら負になる。壁の損失のため \$k\$ はもはや実数ではなく、複素数になり \$k = k_1 + jk_2\$ とかけることになる。そこで \$\omega - k\$ の関係を図示すると、図-3 のようになり、0-mode と \$\pi\$-mode の近くでは、Loss を無視したときと大きくずれ、\$\omega \omega_n / Q_0 B\$ に比例する位相ずれの生じることがわかる。

III-b Transient Phenomena

Transient の Field の立上りは (10), (11) 式で与えられるので、指数関数的な共振 Mode の立上りに非共振 Mode の自由振動とのビートが重なり、図-4 のように Build-up Curve がえられる。これは、BNL の AGS 入射用 50 MeV Drift-tube Linac (0-mode) に対するもので、実際に検出された Build-up Curve の写真と非常によく対応していることがわかる。また Transient の状態の Phase Shift も同じように計算でき、図-5 のように実験とよく一致した結果がえられる。\$\pi\$-mode の Multi-cell Cavity についても同様で、測定とよく一致した計算結果がえられている。

IV Beam Loading and Beam Loading Compensation

Beam Loading の効果を調べるには、(3) 式に代入し、Beam Induced Field を \$\int_V \vec{j} \cdot \vec{E}_n dv\$ を計算して、これによる Normal Modes の励振として求めればよい。この詳しい計算は、I にあげた、筆者の BNL Int. Rep. AADD-87 の付録にある。ここでは定性的にのみ述べることにする。

ビームの Bunches は、次々に入射して、非常に短い時間のうちに軸上に一様に分布すると考えてよい。そこで Generator のときと同じように Step Function 型の外からの Excitation があつたと考える。またこの場合には、励振の Sources は各 Bunches で、いわば Multiple feeds である。そこでビームの Bunches と同期するような振動数 \$\omega'_\lambda\$ の Normal Mode のみが非常に強く励起され、他の Modes の励振は、Bunches の数を \$N_b\$ として、\$1/N_b\$ 程度に小さくなる。このように同期条件は

$$\omega'_\lambda = 2\pi \nu \nu_b / L_b \quad \text{で与えられる。}$$

\$\nu_b\$ は粒子の速度で \$L_b\$ は Bunches の間隔、\$\nu\$ は正の整数で通常 1 とおけばよい。このように考えると、Beam-Cavity の Coupling Integral は、

$$\int_V \vec{j} \cdot \vec{E}_\lambda dv = \frac{1}{2} I_0 \epsilon_0 L \sqrt{\alpha_\lambda} T_\lambda f_\lambda e^{j(\omega'_\lambda t + \varphi_b)} \quad (15)$$

ここで I_0 は平均ビーム電流 (Bunches に対して平均したもので、通常の Linac では、いわゆる Peak 電流)、 φ_B は Bunch の中心の電波に対する位相角、 T_λ は Transit-time Factor、 f_λ は Bunch の Form Factor である。O-mode Drift-tube Cavity では $T_\lambda = (\sin \pi g/L_0) / (\pi g/L_0)$ [L_0 : Cell Length, g : Gap Length]、また $\delta\varphi$ のとりかたを矩形の Bunch と考えれば、 $f_\lambda = \text{Sinc}(\frac{\delta\varphi}{2}) / (\delta\varphi/2)$ である。(15)式と(9)式に代入して、 AU_λ を $-j I_0 \epsilon_0 L \sqrt{\alpha_\lambda} T_\lambda f_\lambda \omega_\lambda / 2 \epsilon_0$ であるか之れはよく、結局、Beam による Induced Field は軸上で

$$E_{b\lambda} = -r_{e\lambda} I_0 f_\lambda \frac{K_\lambda}{T_\lambda} e^{j(\omega_\lambda' t + \varphi_B)} \left\{ 1 - \exp\left[-\left(\frac{\omega_\lambda'}{Q_\lambda}\right)t\right] \right\} \cos \frac{\lambda \pi z}{L} \quad (16)$$

であることがわかる。 $r_{e\lambda}$ はいわゆる Effective Shunt Impedance であり、 $r_{e\lambda} = \epsilon_0^2 L T_\lambda^2 Q_\lambda / 2 \epsilon_0 \omega_\lambda'$ である。上述のように非共振 Modes に対しては、External Force に相当する AU_λ のおきかえが $1/N_b$ に小さくなるので、ほとんど無視できる。 (16) 式で与えられる Synchronizd Mode のみのきわめた Build-up Curve による励起が観測されることは図-6

ここで一つ大切なことは、Beam による Induced Field は、Beam の位相とよほど π だけずれた方向に生ずることである。そこで Generator から feed された Field と加之合せると、図-7 のようなベクトル図がえられ、合成 Field と Beam のつくる角が φ_B となり、Generator 自身からの Driving Field と Cavity 内の Field には $\Delta\varphi$ の位相のずれが生ずる。おきかえれば、Beam は Reactive Load ($\varphi_B = 0$ ではない限り) である。

IV-a Beam Loading Compensation

High Intensity Linac では、(16)式による Beam Loading Effects による Field の変化と補償し、Beam Pulse の間一定 Energy でロスベクトルを得るため、Beam Loading Compensation の技術が必要となる。これは通常 Beam-on に合わせて、Generator からの Power を増加させ、加速 Field の減少を補償する方法がとられる。しかし、既に述べたように、Beam の Induced Field は、Near-by Modes を励起し、きわめた Field (16)式) であるので、Generator からの Field は、O-mode や π -mode であり、特定の点から feed する限り、必ず Near-by Modes の励振を伴う。そこで、その差が、振巾補償の不完全さや位相のずれとなって表れる。とくに Beam Loading は、本質的に Transient Phenomena であるので、この差は Wiggles を伴う、かなり大きな効果となることがある。とくに通常の Linac で 100 mA を越す Beam を加速しようとするとき、上述の Reactive Loading の効果も示す、注意深い Compensation 回路の設計が必要となる。図-8, 9 に、Brookhaven の AGS 用 50 MeV Linac (中心 Feed) で 30 mA の Beam を加速したとき、Optimum Compensation をしても、さらに残った Uneven Field や Phase Shift の測定と、Normal Mode Analysis による計算の結果の比較を示す。

V. Methods for Improvements

以上のようた、主として High Intensity Standing-wave Linacs に起る、Near-by Modes の励起に伴う諸効果と減らし、強い Beam を安定でよい Spectrum をもちうるように加速するには、いくつかの改良の方法が、上記の考察から提案される。そのうちの主なものを次にあげる。

V-a. Multiple Feeds の採用

0-mode と π -mode の空洞では、これらのいわゆる Cut-off Modes と Near-by Modes の Mode Separation は近似的に

$$\omega_{\pm m}^2 - \omega_0^2 \propto m^2/L^2$$

を満たす。ここで L は空洞の全長で、 L^2 に反比例して Separation が小さくなり、Near-by Modes の励起の振幅が大きい (式(11))。また何番目の Mode からよって、その波数の差 m の 2 乗に反比例して Separation が小さく、励起振幅は減少する。従って、 L を短かくするところが考えられるが、そうすると、空洞をいくつかに分けて、直列にたどりついで Energy を与えるために必要となる。そして各空洞間の位相の調整、とくに Beam 電流の大きい場合には、上述の Reactive Loading の効果もよくめた調整が必要となり、複雑なシステムとなる。そこで L はできるだけ長く、空洞の数を少くすることが望ましい。

そこで考えられるのが、一つの空洞の Multiple Feeds である。これは当然、あまり数が多くなると、Feeds 間の位相調整が面倒になる。空洞をそのまま Manifold と作り、Feeds を distribute させる方式が考えられる。しかし、実際には技術的にいろいろ問題がある。そこで、中間的立案として、技術的にも調整が比較的容易であり、かつ L が十分長くおいて、 m も高くおいて、考えられるのが、Double Feeds の案である。とくに 0-mode Cavity で、入射側と出力側の終端から、それぞれ $1/4 L$ だけ離れた二点で、共振 Mode で同位相になるように Feed する。そうすると、最低次の TM₀₁₁-mode は、 U_1 の符号がこの二点でちょうど逆位相になるので打ち消し合う。このこと以外では、 m の奇数次の Modes についていえる。また $m (=m)$ が 2 の 2 番目の Near-by Modes は、 $\pi = 1/4, 3/4$ において、 $\cos \frac{2\pi z}{L}$ がちょうど Nodes になるので、ほとんど励起されない。従って、このような Double-Feeds で、励起されると期待される最低次の Near-by Modes は $m=4$ となり、Mode Separation を十分大きくすることができる。実際には、空洞の非対称性などのため、理想的な状態はつくりにくい。このシミュレーションで報告された KEK-PS 用 Injector Linac はこの方式を用い、従来の他の Linacs に比べて、格段と Wiggles 等が少なく、きれいな Beam Loading Compensation に成功した。(図-10)

V-b. Alternating (or Bi-) Periodic Structures の採用

いわゆる Multi-cell Cavities では、 π -mode のような Cut-off Modes の代りに、Pass Band の中央の $\pi/2$ -mode を使うと、Nearby Modes は、この Mode のまわりに Anti-symmetric に分布し、 $\omega_{\pm m}^2 - \omega_0^2$ の符号が変わり、 $\pm m$ の Modes が互いに打ち消すので、ほとんどこのような非共振 Modes の励起が起らない。ただしこの場合は、Standing Wave で用いると、1 cell 毎に加速電場 0、加速エネルギーの貯えられの Cells が生じて、いわゆる Shut-Impedance が半分になってしまう。そこで、このように加速に効かない Cells の長さを有効な Cells に比べて短かくして、二重周期性をもちようとする。この場合、Dispersion Curve は一般に二つに分れるが、図-11 の二つの Field Patterns に相当する共振周波数 ω_1, ω_2 を両 Cell の径などで調整して match させれば、図-12 に示すように、この周波数で $\pi/2$ -mode の Cavity として働く。これがいわゆる APS 方式で、類似の方式も種々開発され、Beam Blow-up 効果などもよく、極めて安定に働くことが立証されている。

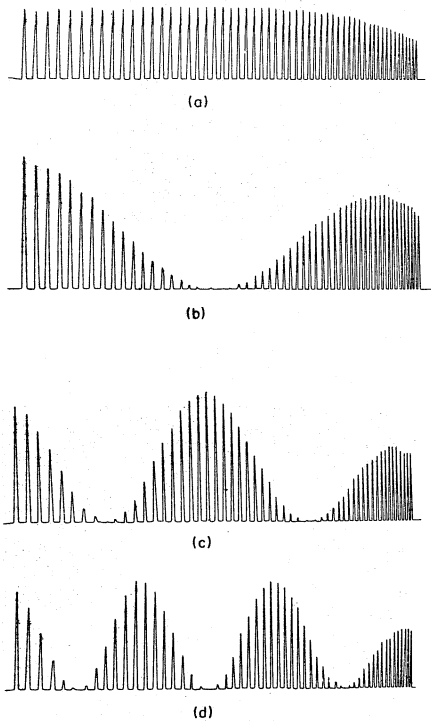


FIG.1 NORMAL MODE FIELDS OF A DRIFT-TUBE LINAC CAVITY DEMONSTRATED BY THE RESONANT FREQUENCIES PERTURBED BY A ALMINIUM BALL ON THE CAVITY AXIS.

- (a) TM_{010} -MODE, (b) TM_{011} -MODE
- (c) TM_{012} -MODE, (d) TM_{013} -MODE

FIG.3 DISPERSION CURVES FOR UNIFORM MULTI-CELL STRUCTURES WITH LOSSES.

k_1, k_2 : REAL AND IMAGINARY PART OF PROPAGATION CONSTANT, k , $|\delta k| \approx \frac{1}{L_0} \left(\frac{\omega}{Q_0 B} \right)^2 \frac{1}{2}$

DOTTED CURVE SHOWS THE COSINE-LIKE CURVE WITHOUT LOSSES.

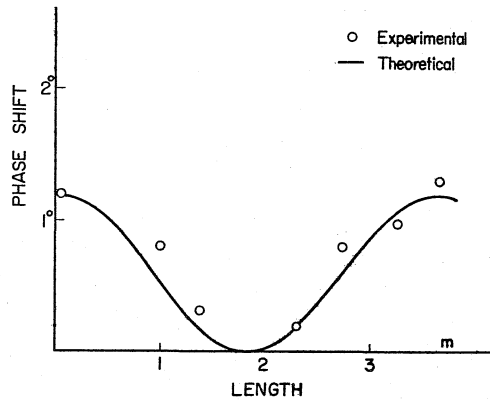
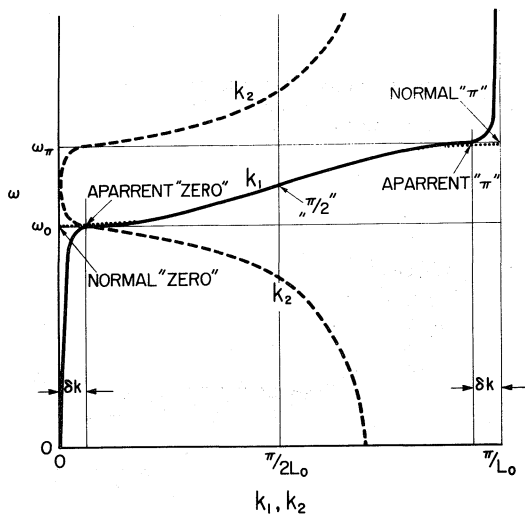
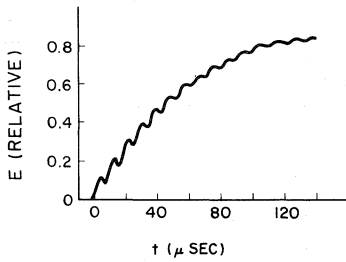
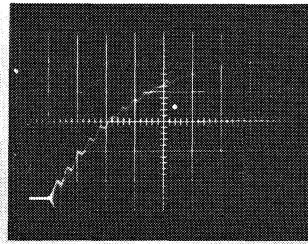


FIG.2 STEADY STATE PHASE SHIFT ALONG THE CAVITY LENGTH. THE CAVITY IS FED AT THE MIDDLE OF THE LENGTH. THE DELTA IN FIG.1 AND FIG.2 WERE TAKEN BY A HALF-SIZE MODEL CAVITY FOR KEK PROTON LINAC.



(a) CALCULATED



(b) OBSERVED (20 μSEC/DIV.)

FIG.4 TRANSIENT BUILD-UP OF THE FIELD NEAR THE CENTER OF AGS LINAC CAVITY. (A) CALCULATED FROM THE NORMAL MODE ANALYSIS. (B) OBSERVED BY A PICK-UP ELECTRODE (20 μSEC/DIV.).

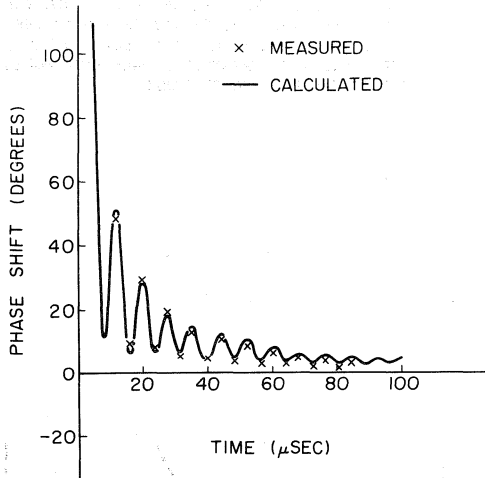


FIG.5 TRANSIENT PHASE SHIFT BETWEEN THE CENTER AND THE LOW ENERGY END OF AGS LINAC CAVITY.

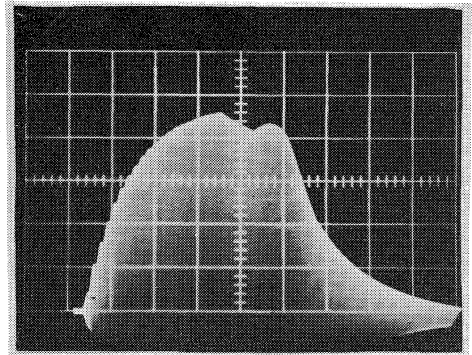


FIG.8 EFFECT OF BEAM LOADING IN THE RF FIELD PATTERN NEAR THE CENTER OF AGS LINAC CAVITY (50 μSEC/DIV: $I_0 = 20$ mA WITH PULSE LENGTH OF 60 μSEC).

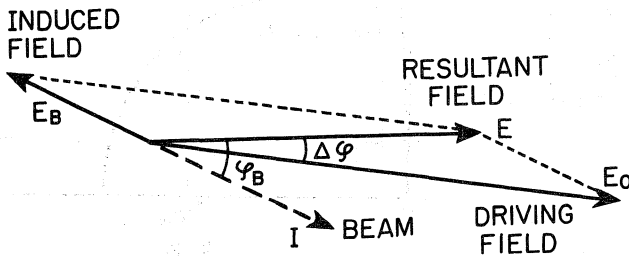


FIG.9 COMPOSITION THE CAVITY FIELD FROM THE DRIVING FIELD AND THE BEAM INDUCED FIELD.

FIG. 6

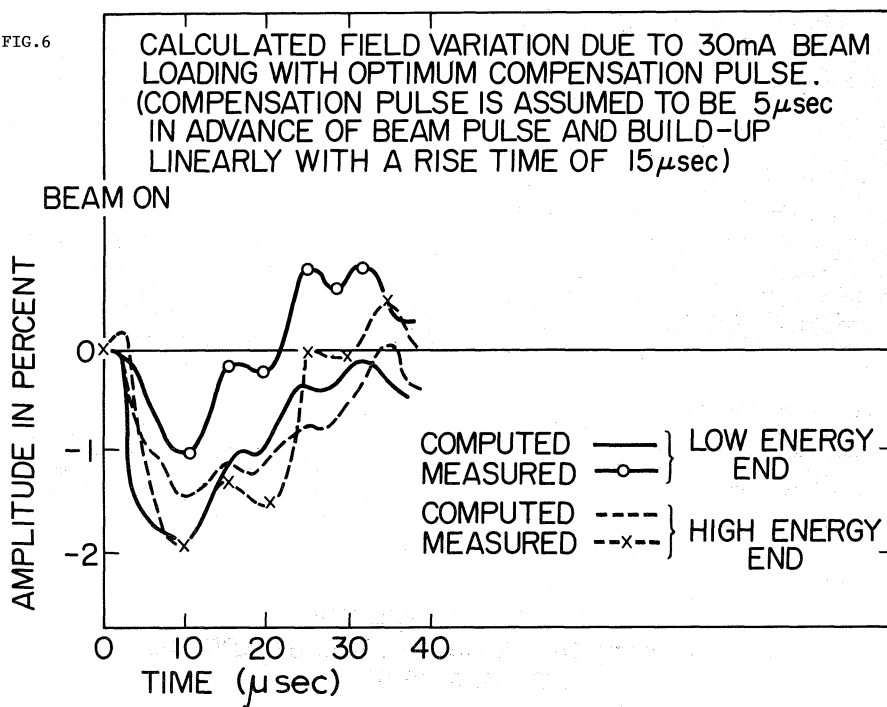
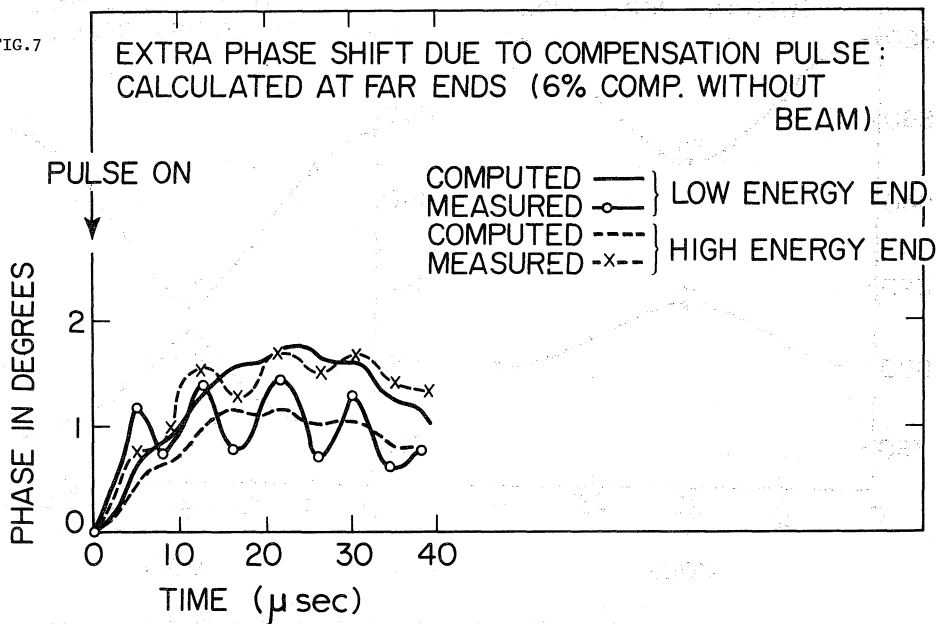


FIG. 7



In FIG. 6 AND FIG. 7 DATA WERE TAKEN FOR THE AGS 50 MEV INJECTOR LINAC CAVITY.

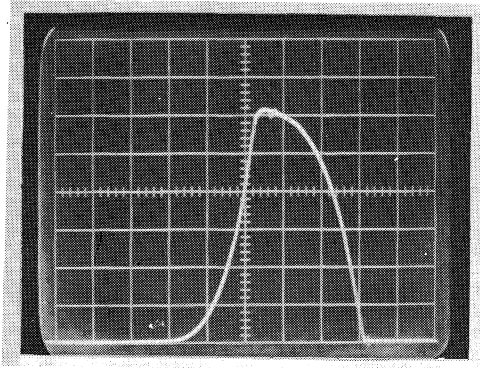
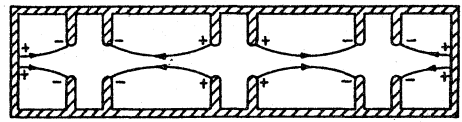
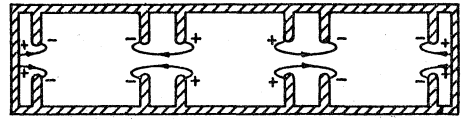


FIG.10 RF FIELD PATTERN OF KEM LINAC CAVITY WITH BEAM LOADING COMPRESATION. (DOUBLE FIELD; 100 μ S/DIV, $I_0 = 50$ mA WITH PULSE LENGTH OF 15 μ SEC).



ω_1



ω_2

FIG.11 TWO FIELD CONFIGURATIONS IN ALTERNATING PERIODIC STRUCTURE CORRESPONDING TO DIFFERENT BOUNDARY CONDITIONS.

● MEASURED FREQUENCY
 — CALCULATED CURVE BY NORMAL MODE ANALYSIS

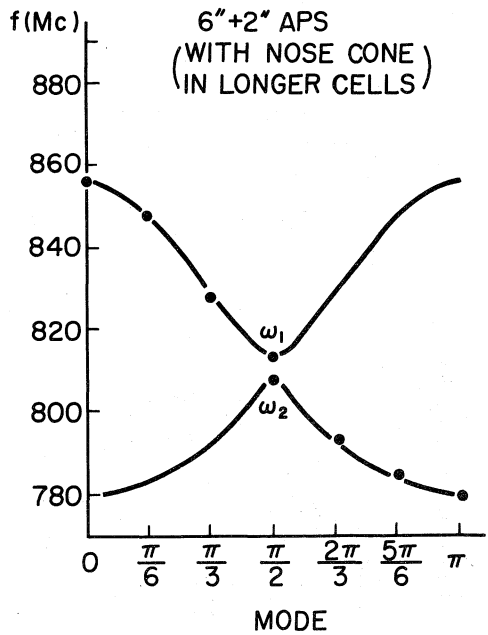
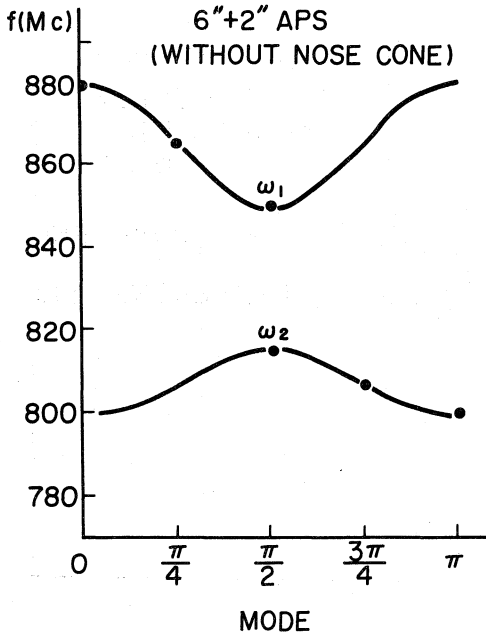


FIG.12 CALCULATED AND MEASURED DISPERSION CURVES FOR ALTERNATING PERIODIC STRUCTURES. THE RIGHT-HAND SIDE SHOWS A MATCHED $\frac{\pi}{2}$ MODE STRUCTURE MAKING ω_1 CLOSE ENOUGH TO ω_2 .