

Shigeaki Arai

Institute for Nuclear Study, University of Tokyo
Tanashi-Shi, Midori-Cho, Tokyo, Japan

Abstract

It is found in the INS linac that the accelerating efficiency is deteriorated by the variation of the resonant frequency of the accelerator due to the beam loading. Among the resistive and reactive components of the beam loading, only the reactive component is important for the conventional linac to accelerate the intensive beam below 1 A. In order to improve the beam quality, one should take the detuning effect into consideration in the design of the buncher and debuncher section. Therefore it is required to estimate accurately the resonant frequency shift of the accelerator structure. By the above request, the detuning effect is analyzed and the resonant frequency shift is estimated by the normal mode analyses based on the microwave cavity theory. These calculated results agree with the experimental results.

§ 1 はじめに

TW linac に於ける beam loading 効果がマイクロ波空洞理論に基づく normal mode analysis によって解析された。この analysis は今まで、定在波型の加速管に適用されて来たが、ここでは進行波型加速管に適用される。固く bunch した beam loading がある時の、constant impedance の TW 加速管の中の波動方程式が求められ、加速管の共振周波数のずれ、加速 field の位相のずれ、等が議論される。

§ 2 加速管内の波動方程式

外からマイクロ波が供給されていり加速管に、固く bunch した beam が通過する際の加速管内の RF field の状態が議論される。TW linac の場合、マイクロ波の energy は群速度、 v_g 、で進行する。我々はマイクロ波の群速度に乗って加速管内の field の変化を見る。加速管に於て Z 軸を決め、加速の入口を Z 軸の原点に取

ると、時間、 t 、の時の我々の位置は $z = v_g t$ で表わされる。加速管を単位共振空洞の連続であると考え、J. C. Slater の理論から、単位空洞内の波動方程式は次のように表わせる。

$$\frac{d^2}{dt^2} \int \mathbb{E} \mathbb{E}_a^* dv + \frac{\omega_a'}{Q_0} \frac{d}{dt} \int \mathbb{E} \mathbb{E}_a^* dv + \omega_a'^2 \int \mathbb{E} \mathbb{E}_a^* dv = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{d}{dt} \int J \mathbb{E}_a^* dv \quad (1)$$

この式で、 J は beam の current density、 \mathbb{E} は単位空洞内の field、 \mathbb{E}_a はその中の normal mode field で $\mathbb{E}_a = E_{a0} e^{-jkz}$ で表わされる。 ω_a' は beam が無い時の単位空洞の共振角周波数で、 Q_0 は単位空洞の無負荷の Q 値、 ϵ_0 は真空中の誘電率である。この式は定在波空洞内の波動方程式であるが、TW 加速管の場合には、ある単位空洞内の energy は群速度で、順次となりの単位空洞に移って行くので、この方程式が成り立つ単位空洞も時間も共に群速度で z 方向に移動して行くと考え。

(1) 式の右辺は、bunched beam による強制振動を表わす項で次式で与えられる。

$$-\frac{1}{\epsilon_0} \int J \mathbb{E}_a^* dv = -\frac{2FI_0 E_{a0}}{\epsilon_0} e^{j(\omega t + \phi_b)} \quad (2)$$

ここで、 ϕ_b は外部から励振される field に対する bunch の相対的方位相を表わし、

F は bunch の形によつて決まる form factor を表わしている。ここでは、固く bunch しているとして仮定し、 $F = 1$ と取る。(1) 式に (2) 式を代入し、初期条件として、

$\omega = \omega_a'$ 、 $t = 0$ で $\int \mathbb{E} \mathbb{E}_a^* dv = V_0$ と与えると、(1) 式の $\int \mathbb{E} \mathbb{E}_a^* dv$ についての解は次のように求められる。

$$\int \mathbb{E} \mathbb{E}_a^* dv = \left\{ V_0 e^{-\frac{\omega}{2Q_0} t} - \frac{2Q_0 I_0 E_{a0}}{\epsilon_0 \omega} e^{j\phi_b} (1 - e^{-\frac{\omega}{2Q_0} t}) \right\} e^{j\omega t} \quad (3)$$

電場は $\mathbb{E} = E_a \int \mathbb{E} \mathbb{E}_a^* dv$ で与えられるので次のようになる。

$$\mathbb{E} = \left\{ E_{a0} V_0 e^{-\frac{\omega}{2Q_0} t} - \frac{2Q_0 I_0 E_{a0} E_{a0}}{\epsilon_0 \omega} e^{j\phi_b} (1 - e^{-\frac{\omega}{2Q_0} t}) \right\} e^{j(\omega t - kz)} \quad (4)$$

normal mode field の振幅 E_{a0} と加速管の peak shunt impedance r の関係は

$r = 2Q_0 E_{a0}^2 / \epsilon_0 \omega_a'$ で与えられる。故に、 $t = 0$ の時の電場を E_0 とすれば z の位置での電場は $t = z/v_g$ であるから次のように求められる。

$$E(z) = \left\{ E_0 e^{-\frac{\omega}{2v_g Q_0} z} - I_0 r e^{j\phi_b} (1 - e^{-\frac{\omega}{2v_g Q_0} z}) \right\} e^{j(\omega t - kz)} \quad (5)$$

この式で、 E_0 は外部 RF generator によつて励起された加速管の入口での電場振幅

である。第1項は外部から drive された電場が加速管にそって exponential に減衰するのを表わし、第2項は beam induced field が exponential に build up して行く様子を表わしている。

加速管の中での RF power の変化は、 $I_0 V = E_b$ で表わすと次のように求められる。加速管内の RF power は peak electric field E_p によって次のように表わせる。

$$P = v_g W = v_g Q_0 E_p^2 / r \omega \quad (6)$$

この関係から、 z の位置での RF power は、上式(5)から得られる E_p を代入すると求まる。

$$P = P_0 \left[1 + \left\{ \frac{E_b (1 - e^{-\frac{\omega}{2v_g Q_0 z}})}{E_0 e^{-\frac{\omega}{2v_g Q_0 z}}} \right\}^2 - 2 \frac{E_b (1 - e^{-\frac{\omega}{2v_g Q_0 z}})}{E_0 e^{-\frac{\omega}{2v_g Q_0 z}}} \cos \phi_b \right] \quad (7)$$

$$P_0 = \frac{v_g Q_0}{r \omega} E_0^2 e^{-\frac{\omega}{v_g Q_0 z}} = P_{in} e^{-\frac{\omega}{v_g Q_0 z}}$$

ここで、 P_{in} は加速管への input power である。 P_0 は beam loading が無い時の、加速管内の z の位置での RF power を示している。(7)式は、input power, beam current, それに加速管の parameter を代入して計算した結果が、Fig-1 で実験値と比較されている。

§3 beam loading による加速管の detuning

(1)式の単位空間内の波動方程式は、 $\int E E_a^* dV = \text{constant} e^{j\omega t}$ で表わせるので、次のようになる。

$$j \left(\frac{\omega}{\omega_a'} - \frac{\omega_a'}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_0} = \frac{j}{\epsilon_0 \omega \omega_a'} \frac{\frac{d}{dt} \left(\int E E_a^* dV \right)}{\int E E_a^* dV} \quad (8)$$

この式に bunch の form factor は $F=1$ であると近似した。(8)式と(3)式を代入し、normal mode field と peak shunt impedance の関係を使い、 E_{a0} を消去し、 $I_0 V$ を E_b で表わすと(8)式は次のようになる。

$$j \left(\frac{\omega}{\omega_a'} - \frac{\omega_a'}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_0} = \frac{1}{Q_0} \frac{-E_b e^{j\phi_b}}{E_0 e^{-\frac{\omega}{2v_g Q_0 z}} - E_b (1 - e^{-\frac{\omega}{2v_g Q_0 z}})} \quad (9)$$

この式の右辺を見ると、共振周波数の変化に寄与する部分が二つある。loading の reactive な成分を表わす imaginary part の寄与は次式で与えられる。

$$\Delta \omega = \frac{\omega_a'}{2Q_0} \frac{-E_0 T E_b \sin \phi_b}{E_0^2 T^2 + E_b^2 (1-T)^2 - 2E_0 T E_b (1-T) \cos \phi_b} \quad (10)$$

22で、 $\Delta\omega$ は共振角周波数のずれ $\omega - \omega_a'$ で、 T は加速管の中でのfieldの減衰項 $e^{-\frac{\omega}{2Q_0 Q_b} \tau}$ である。- τ resistive 成分を表わす real part は beam に τ で失われる power から決まる Q 値、 Q_b 、 ϵ を与える。

$$\frac{1}{Q_b} = \frac{1}{Q_0} \frac{E_0 T E_b \cos \phi_b - E_b^2 (1-T)}{E_0^2 T^2 + E_b^2 (1-T)^2 - 2 E_0 T E_b (1-T) \cos \phi_b} \quad (11)$$

Q_b と Q_0 の total Q 値、 Q_T 、が寄与する共振角周波数のずれは次式で与えられる。

$$\Delta\omega = \omega_a' \left(\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q_T}\right)^2} - 1 \right) \quad (12)$$

故に beam loading による total の共振角周波数のずれは (10) (12) 式より次のようになる。

$$\Delta\omega = \left[\left\{ \omega_a' - \frac{\omega_a'}{2Q_0} \frac{E_0 T E_b \sin \phi_b}{E_0^2 T^2 + E_b^2 (1-T)^2 - 2 E_0 T E_b (1-T) \cos \phi_b} \right\} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q_T}\right)^2} - 1 \right] \quad (13)$$

§4 detuning による加速 field の位相のずれ

加速 field の位相のずれは、beam loading が加速管を detune した結果生ずるものと考えられる。加速管の共振周波数が Δf 変化した時に、加速管を通過する間に生ずる加速 field の位相のずれ $\Delta\psi$ は、加速 field の周波数を加速管の共振周波数から $-\Delta f$ ずらした時に、加速管を通過する間に生ずる位相のずれに等しいと近似できる。この時、加速管の群速度 v_g は、我々の取扱う共振周波数の近傍では一定であると仮定する。共振周波数に等しい周波数の加速 field の位相速度を v_{p0} 、共振周波数から Δf ずれた加速 field の位相速度を v_p とすると、加速管長 L を通過した時の両者の間の位相差 $\Delta\psi$ は次式で与えられる。

$$\Delta\psi = 360 \cdot f_0 \cdot L \left(\frac{1}{v_{p0}} - \frac{1}{v_p} \right) \quad (14)$$

$$\frac{1}{v_p} = \frac{v_g + \lambda_g \Delta f}{v_g \lambda_g (f_0 + \Delta f)}$$

故に、beam loading による共振周波数のずれによる位相のずれは次のようになる。

$$\Delta\psi = 360 \cdot f_0 \cdot L \left(\frac{1}{v_{p0}} - \frac{v_g - \lambda_g \Delta f}{v_g \lambda_g (f_0 - \Delta f)} \right) \quad (15)$$

このようにして求めた計算結果が Fig-1 で実験値と比較されている。

§ 5 discussion

加速fieldの位相のずれは、単に driven field と beam-induced field の重ね合わせによつて生ずるとも考えられる。この考え方によつて、(5)式から、driven field と resultant field の間の位相のずれが、次式で与えられる。

$$\Delta\psi = \tan^{-1} \left\{ \frac{E_b (1 - e^{-\frac{\omega}{2v_0} Q_0^2}) \sin \phi_b}{E_0 e^{-\frac{\omega}{2v_0} Q_0^2} - E_b (1 - e^{-\frac{\omega}{2v_0} Q_0^2}) \cos \phi_b} \right\} \quad (16)$$

上式で計算した結果は、我々が現在問題にしてゐるぐらゐの beam loading では、(15)式で計算した結果と非常によく一致することが確認された。

次に beam loading による位相のずれを加速管に供給するマイクロ波の周波数を変えて、compensate する問題も考える。これは beam loading によつて変わった、加速管の共振周波数に運転周波数を近づけてゐることである。しかし、(13)式によつて与えられる共振周波数のずれから分子のように、共振周波数のずれは、加速管の位置によつて異つてゐる。ゆへに、加速管の出口での位相のずれが、ゼロになるように、加速管に供給するマイクロ波の周波数をずらした時、その周波数は加速管内の新しい共振周波数の、ほぼ平均周波数となる。この考え方に基づいて、beam current と bunch の乗る driving field の位相が指定された時、beam loading による位相のずれをなくす為、運転周波数をどの程度ずらすべきかが求められた。この結果が Fig-2 に実験結果と比較されてゐる。

今まで、固く bunch した beam loading について議論して来た。また充分固く bunch した時の bunch form factor, F , と bunch の effective な位相 ϕ_b の決め方について、最後に議論する。ある位相中を持つた bunch を充分細かく分け、分けられたものを、固く bunch した beam と考え、1 から M まで番号をつける。それぞれの番号に対応した bunch の加速位相を $\Delta(N)$, current を $I_b(N)$ とする。それぞれの bunch の form factor は $F=1$ であるので、 M 個の bunch によつて induce された field の total field が M 個の bunch によつて構成される実際の bunch によつて induce された field であると考えられる。故に実際の induced field は次式で与えられる。

$$E_b = V (1 - e^{-\frac{\omega}{2V_0 Q_0^2}}) e^{j(\omega t - k z)} \sum_{N=1}^M I_b(N) e^{j\Delta(N)} \quad (17)$$

上式から、 F と ϕ_b が次のようになる。

$$F = \frac{1}{\sum_{N=1}^M I_b(N)} \sqrt{\left[\sum_{N=1}^M I_b(N) \cos \Delta(N) \right]^2 + \left[\sum_{N=1}^M I_b(N) \sin \Delta(N) \right]^2} \quad (18)$$

$$\phi_b = \tan^{-1} \left[\frac{\sum_{N=1}^M I_b(N) \sin \Delta(N)}{\sum_{N=1}^M I_b(N) \cos \Delta(N)} \right] \quad (19)$$

references

- 1) S. Arai, E. Tojyo, K. Yoshida: Proceedings of the 1977 linear accelerator meeting in Japan (KEK-77-28)
- 2) T. Nishikawa, Minutes of the 1964 conference on Proton linear accelerators, (MURA-714, Wisconsin, 1964) 214.
- 3) J. C. Slater: Microwave Electronics (Dover Publications, Inc., New York, 1950).

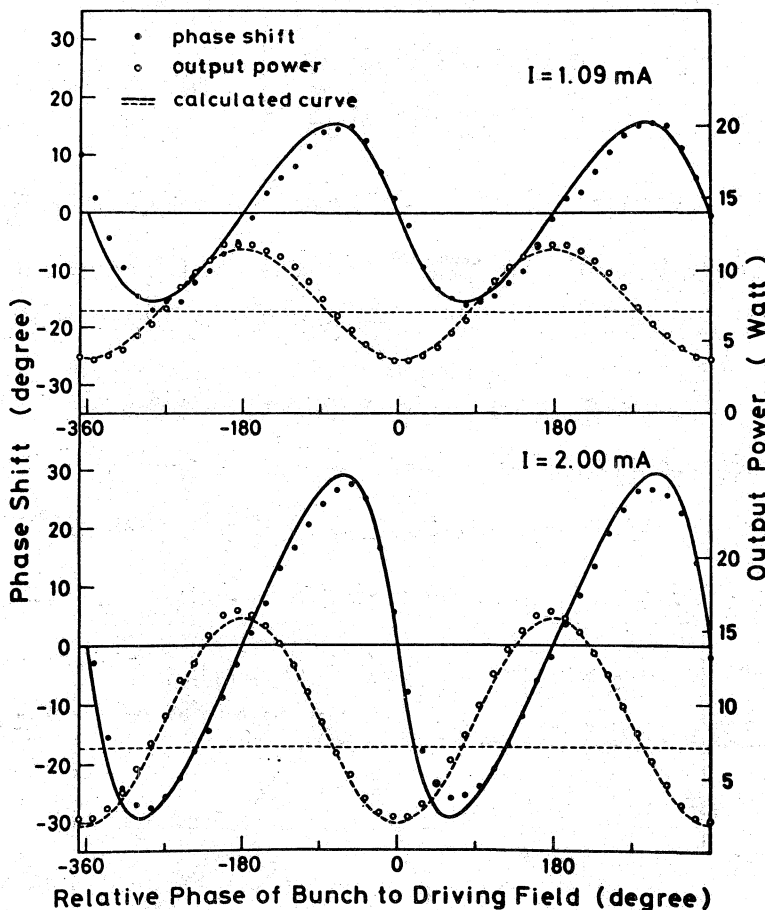


Fig-1
 input power 8.19 watt
 $r = 61 \times 10^4 \text{ } \Omega/\text{cm}$
 $V_0 = 23.9 \times 10^7 \text{ cm/sec}$
 $L = 21.7 \text{ cm}$

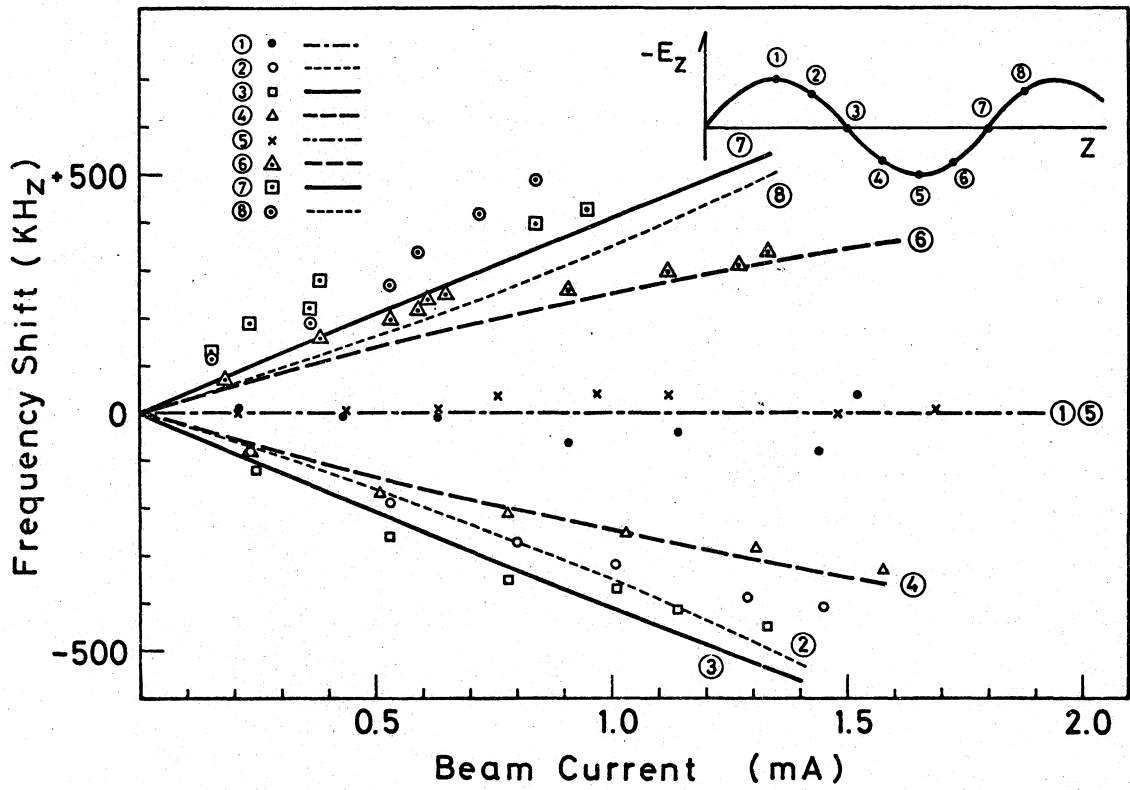


Fig-2

beam loading による位相のずれを打消す為に必要な運転周波数のずれの量。