

[P8-37]

Scattered Fields Analysis with FD-TD Method around a Pulsed Electron Beam  
based on Point Charge Responses

Shusuke NISIYAMA, Satoshi TOMIOKA and Takeaki ENOTO

Division of Quantum Energy Engineering, Graduate school of Engineering, Hokkaido University  
Kita-13jo Nisi-8chome Kita-ku Sapporo, Hokkaido, 060-8628, Japan

ABSTRACT

This paper deals with a finite-difference time-domain (FD-TD) analysis of scattered fields around a pulsed electron beam. We have approached this problem in two steps. The first step is to calculate scattered field for a point charge (impulse beam) instead of the actual beam. The second step is convolution with this field and the beam waveform. We also describe the relation between the temporal resolution and the allowable aliasing error because the high energy point charge has very high frequency spectrum of electromagnetic fields.

点電荷の応答を元にした電子ビームパルス周辺の散乱電磁界の FD-TD 法による解析

1. はじめに

有限差分時間領域法 (FD-TD 法)[1] は Maxwell 方程式を空間的・時間的に差分方程式として時間発展的に解く方法で、時間領域で電磁界の状態を知ることができるため、電磁界散乱問題やアンテナ、立体回路、平面回路の解析などで広く用いられている。加速器の航跡場解析などのビーム周辺電磁界の散乱問題も FD-TD 法やこれと同様の手法である Finite Integration Theory (FIT)[2] が用いられている。

加速器のパルスビームの解析では、波源であるビームは Maxwell 方程式中の自由電流として表されるが、電荷保存則を課せられるために、ビームの軌道が離散化された空間のグリッドに沿わない場合の扱い方は難しくなる。また、解析空間が解放領域である場合に用いられる吸収境界条件では、ビームが発生する電界の向きが放射状となる電磁界に対しては吸収境界からの反射が無視できない程大きくなってしまふ。ビームが発生する電磁界を散乱体上で与える散乱界 FD-TD 法 [3] や、散乱体を囲む閉面上の電磁流 (Huygens-source) として与える場合 [4] にはこれらの困難はないが、入射界が必要となる全ての位置で毎時刻にビームからの電磁界が既知でなくてはならない。多くの場合、パルス波形に対し数値的に積分をすること

になり、入射界のための計算量が非常に多くなる。

本稿では、ビームの軌道と同じエネルギーで運動する点電荷の電磁界を入射界として用いて散乱界を計算し、あとでビームパルスの波形と畳み込み積分をすることでビームパルスに対する散乱界を計算した。この方法では、入射界は解析的に計算できるため、入射界のための計算量はそれほど多くはない。一方で、高エネルギーの点電荷による電磁界は非常に高い周波数のスペクトルを含むため、時間的なサンプリング間隔によってはエイリアス効果による誤差を生じる。そのため、許容できるエリアジング誤差とサンプリング間隔の関係も示した。

2. 点電荷による入射界

散乱界 FD-TD 法では、以下のように全電磁界  $E, H$  を入射界  $E^i, H^i$  と散乱界  $E^s, H^s$  に分け別々に扱う。[3]

$$E = E^s + E^i \quad (1)$$

$$H = H^s + H^i \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}^s = & -\frac{\sigma}{\epsilon} E^s + \frac{1}{\epsilon} \nabla \times H^s \\ & -\frac{\sigma}{\epsilon} E^i - \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \dot{E}^i \end{aligned} \quad (3)$$

$$\dot{H}^s = -\frac{1}{\mu} \nabla \times E^s - \frac{\mu - \mu_0}{\mu} \dot{H}^i \quad (4)$$

この場合は、散乱界のみが差分方程式で数値的に計算され、入射界は既知でなければならない。ただし、散乱体以外の位置では  $\sigma = 0$ ,  $\epsilon = \epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$  であるから入射界は必要なく、通常の FD-TD 法と同じである。一方、Huygens-source で入射界を与える場合は、散乱体を囲む閉面上で入射界を求め、等価電磁流として与える。[4]

$$\mathbf{J} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}^i \quad (5)$$

$$\mathbf{M} = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}^i \quad (6)$$

$$\dot{\mathbf{E}} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \mathbf{E} + \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{\epsilon} \mathbf{J} \quad (7)$$

$$\dot{\mathbf{H}} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} - \frac{1}{\mu} \mathbf{M} \quad (8)$$

したがって、パルスビームによって生じる電磁界が散乱体あるいは Huygens-source の各点で毎時刻に必要なとなる。

ほとんどの場合、 $\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i$  は計算量が多い数値的な積分計算で求めることになる。しかし、ビームの軌道上を運動する点電荷による入射界ならば、遅延ポテンシャルを用いて解析的に計算できる。たとえば、簡単な例として、 $z$  軸上を一定速度  $\mathbf{v} = (0, 0, v)$  で点電荷  $q$  が動き、時刻  $t = 0$  のときに  $z = 0$  を通過する場合、時刻  $t$ 、位置  $x, y, z$  での入射界は次のようになる。

$$\mathbf{E}^i(x, y, z, t) = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} + (z - vt)\mathbf{e}_z}{(r^2 + \gamma^2 z^2)^{3/2}} \quad (9)$$

$$\mathbf{H}^i(x, y, z, t) = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}^i}{\mu_0 c^2} \quad (10)$$

ここで  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ,  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$  である。この入射界を (1) ~ (4) あるいは (5) ~ (8) に用いて電磁界の時間変化を FD-TD 法で計算すると点電荷のビームによる散乱電磁界が得られる。これは、ビームの電荷密度がデルタ関数の場合の応答、すなわちインパルス応答であるから、この結果とビームパルスの波形を畳み込み積分すると任意波形の線状ビームパルスによる散乱電磁界が求められる。

### 3. 入射界のスペクトルと時間・空間間隔

入射界として扱う点電荷の電磁界は、エネルギーが高い程、また軌道に近い位置ほど時間的に激しく変化し、高周波数のスペクトルが含まれる。

そのため、FD-TD 法での時間ステップが粗いとエイリアス効果で低周波数でのスペクトルも不正確になる。

(9) 式で表される入射電界のビーム軌道に垂直な成分  $E_r^i$  のスペクトルは次のようになる。

$$\mathbf{E}_r^i(x, y, z, \omega) = -\frac{q\kappa}{4\pi\epsilon_0\gamma} e^{-j\kappa z} K_1\left(\frac{\kappa r}{\gamma}\right) \mathbf{r} \quad (11)$$

ここで、 $\kappa = \omega/v$ ,  $K_1$  は 1 次の第 2 種変形ベッセル関数である。 $\Delta t$  の時間間隔で入射界をサンプリングすると、 $\omega \sim \pm 2\pi/\Delta t$  のスペクトルが  $\omega \sim 0$  のスペクトルに重畳する。その比率をエリアジング誤差  $\epsilon$  とすると、 $\kappa r/\gamma$  が 2 ~ 12 の範囲で

$$\epsilon = \frac{2|E^i(\omega = \frac{2\pi}{\Delta t})|}{|E^i(\omega = 0)|} \quad (12)$$

$$\sim \sqrt{2\pi \frac{\kappa r}{\gamma} \exp\left(-\frac{\kappa r}{\gamma}\right)} \quad (13)$$

$$\sim \exp\left(-\frac{1}{1.1} \left(\frac{\kappa r}{\gamma}\right) + 1.2\right) \quad (14)$$

と近似できる。これを  $\Delta t$  について整理すると以下のようにエリアジング誤差  $\epsilon$  に対する  $\Delta t$  の目安が得られる。

$$\Delta t = \frac{r \cdot 1.9 \times 10^{-8}}{\gamma \cdot 1.2 - \ln \epsilon} \quad (15)$$

細かい時間間隔で高い周波数成分の散乱界を計算したとしても、最終的にビームパルスの波形と畳み込みを行う段階で、ビームパルスが含む周波数成分以上のスペクトルは不必要である。また、FD-TD 法で時間間隔を細かくすることはそのまま計算時間の増大となる。そのため、特に高エネルギーのビームの場合にはエリアジング誤差を十分に小さくする時間間隔は細かすぎる場合もある。そのような場合は、入射界の計算は (15) で求めた十分細かい時間間隔で行い、数値的なローパスフィルタを通してからダウンサンプリングをおこなって FD-TD 法の計算に用いることで、FD-TD 法の時間間隔  $\Delta \tau$  が粗くてもエリアジング誤差を抑えることができる。ここで用いるローパスフィルタは、ビームパルスのスペクトルの周波数範囲では十分に歪みが小さく、 $\omega = \pi/\Delta \tau$  における減衰が十分に大きいことが必要である。

FD-TD 法では、空間を離散化するために周波数が高くなるほど分散関係が自由空間とは異なっ

てくる。そのため、通常は解析空間に加える界の最小波長の1/10程度かそれ以下に空間セルサイズを選ぶ。この場合、伝搬速度の異方性は1%程度である。点電荷の界を入射界として加えると非常に高い周波数の成分まで含まれてしまうため、高周波成分で分散誤差が大きくなり、時間領域での波形が自由空間の場合と異なったものとなる。最終的に必要なのはビームパルスが含む周波数成分までであるから、その範囲で分散関係の誤差が十分に小さくなるように空間セルサイズを選んでおけば、ビームパルスの波形と畳み込みを行う事で誤差を含む成分は取り除かれて、正しい結果を得る事ができる。

#### 4. 解析例

解析例として、パルス波形がFWHM=20psのガウス分布をしている線状の電子ビームが $\gamma = 88$  (45MeV)で200mm四方の完全導体板に対し垂直に、導体板の一辺から15mm離れて通過する時の電磁界を散乱界FD-TD法を用いて計算した。解析空間はPML吸収境界条件で囲まれた開放領域で、空間の離散化間隔はビームの進行方向には1mm、垂直方向は2mmである。

図1は、導体板の中央から30mm上流側の位置での全電界 $E_r = E_r^i + E_r^s$ である。破線は点電荷の界を入射界として与えた場合の電界でグリッド分散誤差が大きくなる周波数の成分が強く現れている。このときの入射界のサンプリング間隔は0.41psで、エリアジング誤差は $10^{-2}$ 以下である。また、ローパスフィルタは用いずにFD-TD法の時間ステップも0.41psとした。これを、ビームパルスの波形であるFWHM=20psのガウス波形と畳み込みをすると実線の波形になり、これはガウス波形のパルスビームの界を入射界として与えた場合の結果と一致した。

#### 5. まとめ

本稿では、FD-TD法によるパルス電子ビーム周辺の散乱電磁界の解析について述べた。まず、ビームと同じエネルギーと軌道の点電荷による散乱電磁界を求め、後でビーム波形との畳み込みをおこなうことで任意の波形と軌道のビームに対する散乱電磁界を得ることができる。この方法では、

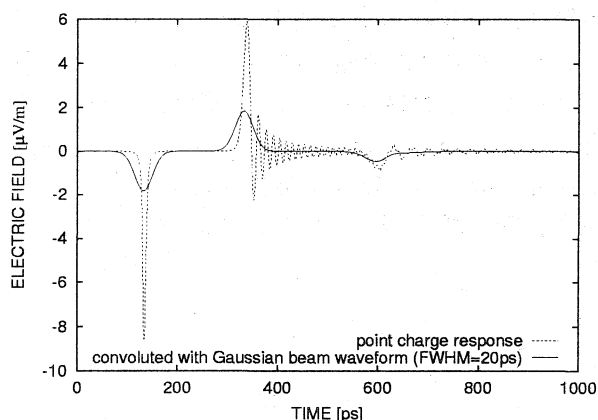


図1 numerical example

パルスビームを強制電流として直接解析体系に入れる場合と比較して、開放領域の場合やビーム軌道が空間メッシュに沿わない場合の扱いが容易である。

#### 参考文献

- [1] K. S. Yee, "Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media", IEEE Transactions on Antennas Propagation, Vol. 14, No. 4, pp. 302-207, 1966.
- [2] T. Weiland, "Time Domain Electromagnetic Field Computation with Finite Difference Methods", International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields, Vol. 9, pp. 295-319, 1996.
- [3] 宇野 亨, 「FD-TD法による電磁界およびアンテナ解析」, Tokyo: コロナ社, 1998.
- [4] R. Holland and J. W. Williams "Total-field versus Scattered-field Finite-difference Codes: a Comparative Assessment", IEEE Transactions on Nuclear Science, Vol. NS-30, No. 6, pp. 4583-4588, December 1983.