

AC Skew Q を用いた差共鳴無しの新しい X-Y 結合生成法と 高速切替による応用

X-Y COUPLING GENERATION WITH AC/PULSED SKEW QUADRUPOLE AND ITS APPLICATION

中村剛[#]

Takeshi Nakamura[#]

Japan Synchrotron Radiation Research Institute / SPring-8

Abstract

The new method of x-y coupling generation with AC or pulsed skew quadrupole is proposed. With this method, no difference resonance is requested; therefore the horizontal and vertical tunes should not be the same value. The AC skew quadrupole is driven by the difference frequency of horizontal and vertical betatron frequency to convert the horizontal position frequency to the vertical kick frequency and vice versa, therefore the coupling with this method is on resonance and can be driven to full coupling strength. In this report, the principle, simulation result, and possible applications are described.

1. はじめに

蓄積リングにおいて、水平と垂直のベータトロン振動の結合(x-y 結合)を引き起こす手法として、水平と垂直のベータトロン周波数の差の周波数で駆動された AC の Skew 四極磁石(AC-SQ) をもちいることを提案している^[1]。

この手法は、差共鳴を用いずともフルカップリングまで結合を励起可能であり、また、AC-SQ は、触媒のような役割を果たすので、その強度は、比較的弱く、ナノ秒の時間幅でのパルス運転が可能である。

応用の一つとしては、近年、検討されつつある超低エミッタンスリングへの適用がある。このようなリングでは、バンチ内の電子の高密度化に伴う内部散乱の増大が、エミッタンスやエネルギー広がり、悪化、Touschek 寿命の短縮を引き起こすので、密度を緩和する手法の一つとして、フルカップルでの運転が検討されている^[2]。

本手法の利点として、差共鳴を用いないので、水平、垂直のチューンに制限を加えることなく運転が可能であり、また、フルカップルでの入射では、入射ビームの水平振動が x-y 結合により垂直振動に変換され、狭ギャップの挿入光源に衝突する問題が生じるが、これも、AC-SQ が弱くパルス運転が可能であることから、入射時に、しかも入射バケットについてのみ AC-SQ の駆動を止め、x-y 結合を解いておくことにより、入射バケット(近辺) 以外では x-y 結合をたもったまま、入射ビームの垂直への回り込みを避けることができる。

また、AC-SQ をパルス運転することにより、x-y のエミッタンスの交換が可能となり、通常の水平に広く、垂直に薄いビームを、水平に薄く、垂直に広がったビームに変換することができる。これについても種々の応用が考えられる。これまで x-y のエ

ミッタンスを交換する手法としては、特別のビーム輸送系をバイパスさせる方法^[3] がいくつか提案されているが、本手法では、通常のリングに弱い AC-SQ を設置するだけでよく、現状のリングにも簡単に適用可能な手法となっている。以下では、原理、AC-SQ の強度の見積もり、応用例について述べる。

2. AC Skew 4 極磁石による x-y 結合生成

2.1 結合定数の AC 化による x-y 結合

本手法について、まず、簡単なモデルで説明する。結合係数 K により結合した 2 つの調和振動子の運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_x^2 x = Ky \quad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_y^2 y = Kx \quad (2)$$

となる。 K が定数であり、かつ、差共鳴の条件を満たしていない時、すなわち、 $\omega_x \neq \omega_y$ では、右辺の駆動力の周波数は、左辺の共鳴周波数と異なるため x-y 結合は小さく、たとえ K を大きくしてもフルカップリングにまで到達させることはできない。そこで、 K に時間依存性を持たせ

$$K(t) = K_0 \cos(\omega_x - \omega_y)t \quad (3)$$

とする。ここで、 x, y について、振幅、位相の時間依存性がそれほど速くないと仮定すると、

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_x t + \varphi_x) \quad (4)$$

[#] nakamura@spring8.or.jp

$$y(t) = y_0 \cos(\omega_y t + \varphi_y) \quad (5)$$

とみなして良いので、式 (1)、(2) の右辺はそれぞれ、

$$\begin{aligned} K(t)x(t) &= K_0 x_0 \cos(\omega_x - \omega_y) \cos(\omega_x t + \varphi_x) \\ &= \frac{K_0}{2} x_0 \left[\cos(\omega_y t + \varphi_x) + \cos((2\omega_x - \omega_y) t + \varphi_x) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} K(t)y(t) &= K_0 y_0 \cos(\omega_x - \omega_y) \cos(\omega_y t + \varphi_y) \\ &= \frac{K_0}{2} y_0 \left[\cos(\omega_x t + \varphi_y) + \cos((\omega_x - 2\omega_y) t - \varphi_y) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

となる。すなわち、 $K(t)$ により、周波数変換が生じその結果、右辺の第1項のように、式(1)、(2)の左辺の共鳴周波数が生成されていることがわかる。第2項については、その周波数が共鳴周波数である場合には $2\omega_x - \omega_y = \pm\omega_y$ となるが、このとき、 $\omega_x = \omega_y$ または、 $\omega_x = 0$ となる必要があるが、これは difference resonance および、integer resonance の条件であり、ここではこれが満たされていないとすれば、第2項は共鳴周波数から外れている。そのため、第2項の共鳴への影響は小さい。そこで、第1項だけ残して式(1)、(2)へ代入すると、

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_x^2 x = \frac{1}{2} K_0 y_0 \cos(\omega_x t + \varphi_y) \quad (8)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_y^2 y = \frac{1}{2} K_0 x_0 \cos(\omega_y t + \varphi_x) \quad (9)$$

となる。これから、AC-SQ による x-y 結合は、on-resonance で発生していることがわかる。すなわち、フルカップルまで励起可能である。

2.2 リングへの適用

リングへの適用を考える。以下では、normalized coordinate

$$\eta_x(\phi_x) = x / \sqrt{\beta_x} \quad , \quad (10)$$

$$\eta_y(\phi_y) = y / \sqrt{\beta_y} \quad , \quad (11)$$

$$\phi_x(s) = \frac{1}{v_x} \int^s \frac{ds'}{\beta_x} \quad , \quad (12)$$

$$\phi_y(s) = \frac{1}{v_y} \int^s \frac{ds'}{\beta_y} \quad (13)$$

で記述する。水平、垂直キック θ_x 、 θ_y がリングの一箇所発生する場合、すなわち AC-SQ が 1 台の場合には、

$$\frac{d^2 \eta_x}{d\phi_x^2} + v_x^2 \eta_x = v_x \sqrt{\beta_x} \theta_x(\phi_x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\phi_x - 2\pi k) \quad (14)$$

$$\frac{d^2 \eta_y}{d\phi_y^2} + v_y^2 \eta_y = v_y \sqrt{\beta_y} \theta_y(\phi_y) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\phi_y - 2\pi k) \quad (15)$$

となる。右辺では、 ϕ_x および ϕ_y はターン毎の値 $\phi_x = \phi_y = 2\pi k$, $k = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$ をとる。左辺において、 ϕ_x と ϕ_y の違いは、リングの一点でのみの問題となっているので、この問題では現れない。そこで、 $\phi_x = \phi_y = \phi$ とおいてよい。これにより、式(14)、(15)の解として

$$\eta_x = \tilde{\eta}_x e^{i(v_x + \Delta v)\phi} \quad (16)$$

$$\eta_y = \tilde{\eta}_y e^{i(v_y + \Delta v)\phi} \quad (17)$$

とおける。また、AC-SQ の強さを、

$$\begin{aligned} K(\phi) &= K_0 \cos(\Delta v_x - \Delta v_y) \phi \\ &= \frac{K_0}{2} \left(e^{i(\Delta v_x - \Delta v_y)\phi} + e^{i(-\Delta v_x + \Delta v_y)\phi} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

とおく。ここで $\phi = 0$ の点を、 $K(t)$ の位相が 0 となるようにとっている。AC-SQ によるキックは、

$$\begin{aligned} \theta_x(\phi) &= K(\phi)y(\phi) \\ &= \frac{K_0}{2} \sqrt{\beta_y} \tilde{\eta}_y \left(e^{i(\Delta v_x - \Delta v_y + v_y + \Delta v)\phi} + e^{i(-\Delta v_x + \Delta v_y + v_y + \Delta v)\phi} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \theta_y(\phi) &= K(\phi)x(\phi) \\ &= \frac{K_0}{2} \sqrt{\beta_x} \tilde{\eta}_x \left(e^{i(-\Delta v_x + \Delta v_y + v_x + \Delta v)\phi} + e^{i(\Delta v_x - \Delta v_y + v_x + \Delta v)\phi} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

となる。ここで、先ほどと同様にチューンの小数点部を打ち消し合っている第1項のみを残し、恒等式

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\phi - 2\pi k) \equiv \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{ip\phi} \quad (21)$$

をもちいて右辺の共鳴周波数の項のみを取り出すと、式(14)、(15)は

$$\Delta v \tilde{\eta}_y = -\frac{K_0}{8\pi} \sqrt{\beta_x \beta_y} \tilde{\eta}_x \quad (22)$$

$$\Delta v \tilde{\eta}_x = -\frac{K_0}{8\pi} \sqrt{\beta_x \beta_y} \tilde{\eta}_y \quad (23)$$

となり、これから、

$$\Delta v = \pm \frac{K_0}{8\pi} \sqrt{\beta_x \beta_y} \quad (24)$$

が得られる。実時間に変換すると、エネルギー交換の周期は、

$$T_c = \frac{1}{2} |T_0 / \Delta v| = \frac{4\pi}{K_0 \sqrt{\beta_x \beta_y}} T_0 \quad (25)$$

となる。ここ T_0 はリングの周回周波数である。

なお、AC-SQ をリングの複数の点に設置する場合、それらの位置同士での互いの水平、垂直のベータatron振動の位相差を駆動の位相差として用いれば、これらの効果を加え合わせることも可能である。

3. フルカップルの励起

3.1 必要な AC-SQ の強度

フルカップルまで駆動するために必要な AC-SQ の強度を導出しておく。エミッタンスの結合比は、AC-SQ による結合生成と、放射減衰や、チューン広がりによる個々の電子の共鳴からのずれ等との競合となる。すなわち、x-y 結合による水平と垂直のエネルギー交換の周期が放射減衰時間およびチューン広がりによる Landau 減衰時間(すなわち、個々の粒子がチューンの違いに気がつくまでの時間) より十分に短い必要がある。Landau 減衰の時間は、Gaussian 分布の場合、チューン広がりとは、

$$\frac{1}{\tau} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega_0 \sigma_v \quad (26)$$

の関係がある。ここで、 ω_0 および σ_v はそれぞれ、リングの角周波数およびチューン広がり の r.m.s. 値である。これらの合成した減衰時間を τ とすると、フルカップル生成に必要な条件は、

$$T_c < \tau \quad (27)$$

となる。

例として、SPRING-8 サイズのリングで、エネルギーを 6GeV とした計算を示す。ここでは、非線形性などの影響により生じることが予想されるチューンの広がりとしとして 5×10^{-4} と仮定する。これによる Landau 減衰時間は 2ms である。放射減衰時間は、現状の 8 GeV での値を用いているが、これは、マルチバンド化や、強磁場挿入光源の利用により、放射減衰が強いことを想定している。

この手法の有効性を探るため、簡単な多粒子シミュレーションを実施した。シミュレーションは、以下の簡単なものである。

* AC-SQ をリングの一箇所に設置。

* リングは線型とし、1 ターンマトリックスでモデ

ル化。

* チューンの広がり、Gaussian 分布

* クロマティシティ

* RF によるシンクロトロン振動

* チューン広がり、およびシンクロトロン振動とクロマティシティによるチューンシフトは、個々の粒子には、そのチューンでの 1 ターンマトリックスを用いて取り込んでいる

* 放射損失と、それに伴う RF 加速による放射減衰。

* モンテカルロによる放射励起。

Table 1 : Sample Ring and Magnet Parameters

Parameter	Symbol	Value
Energy	E_0	6 GeV
Revolution period	T_0	4.79 μ s
Revolution frequency	f_0	208.8kHz
Betatron damping time	τ_β	8.3 ms
Betatron tunes	ν_x / ν_y	0.15 / 0.35
Betatron frequency	f_x / f_y	31kHz / 73kHz
Beta functions	β_x / β_y	5m / 5m
Betatron tune spread	$\sigma_{\nu_x} / \sigma_{\nu_y}$	$5 \times 10^{-4} / 5 \times 10^{-4}$
Landau damping time		2ms / 2ms
Chromaticity	ξ_x / ξ_y	2 / 2

AC-SQ Magnet Parameters (coil winding : half-turn)

Drive frequency	$f_y - f_x$	42 kHz
Strength	K_0	0.01
Energy exchange period	T_c	1.2 ms
Length	L	1 m
Bore radius	b	30 mm
Field gradient (peak)	B'	0.2 T/m
Drive current (peak)	I	143 A
Inductance	L	$\sim 3.5 \mu$ H
Drive voltage (peak)	V	132 V

計算例を、Fig.1 および Fig.2 に示す。これらの例では現象の様子を明示するために、チューン広がりや、クロマチシティを 0 としている。

Fig.1 は、単一粒子の振動を示しており、 $t = 0$ で水平キックを与えている。水平、垂直のエネルギーのやり取りがみられ、周期は、式(25) でしめたものとなっている。

Fig.2 は、他粒子シミュレーションの結果であり x-y がエミッタンスを交換している様子を示す。

Fig.3 は、チューン広がりや、クロマチシティがある場合のシミュレーション結果である。チューン広がりやを 5×10^{-4} とし、AC-SQ は、 $t = 0$ において駆動が開始されている。クロマチシティは、水平、垂直ともに 2 と設定しており、エネルギー広がり、シンクロトロンチューンは、 1.1×10^{-3} および 0.01 である。このような条件であっても、 $T_c = 1$ ms 程度となる $K_0 = 0.01$ 程度で、ほぼフルカップルを達成していることがわかる。

また、Fig.4 は、AC-SQ の立ち上げを 20ms の時定数を持って線型でゆっくり行った場合であり、立ち上がり時のエミッタンスの振動が低減されている。

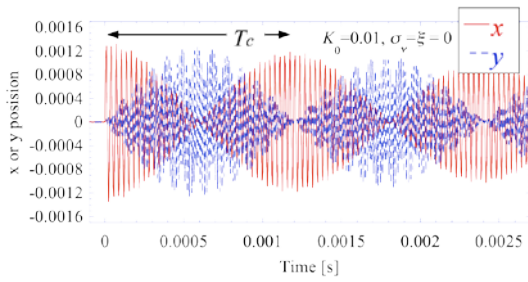


Figure 1 : Motion of a particle, kicked horizontally at $t = 0$. AC-SQ is continuously excited with $K_0 = 0.01$. The energy is transferred between horizontal and vertical with the period T_c . Tune spread and chromaticity are set to zero and radiation excitation is turned-off, to see the motion clearly

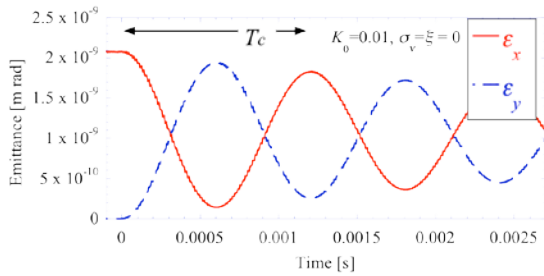


Figure 2 : Emittance evolution after AC-SQ is turned on with $K_0 = 0.01$ at $t = 0$. Horizontal and vertical emittances are oscillating with the period T_c . Tune spread and chromaticity are set to zero.

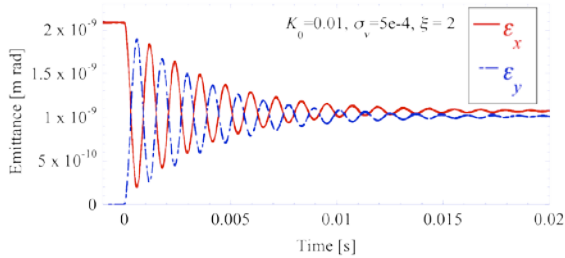


Figure 3 : Full coupling by AC-SQ, which is turned on at $t = 0$ with $K_0 = 0.01$. Tune spread is $\sigma_v = 5 \times 10^{-4}$ and chromaticity is 2 for horizontal and vertical.

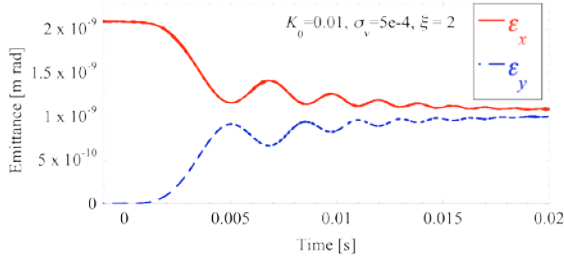


Figure 4 : Full coupling by AC-SQ with is gradually turned on with time constant 20ms at $t = 0$. Oscillation is suppressed with gradual turning on.

Fig. 5 には、AC-SQ の駆動を停止し、x-y 結合が解かれた後のエミッタンスの様子を示す。

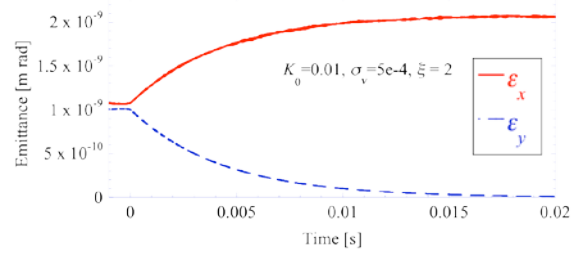


Figure 5: Emittance after AC-SQ is turned off at $t=0$ with the same parameters as in Fig. 3.

3.2 応用例

x-y 結合を用いた円形ビームの生成は、これまでいろいろな応用が考えられているが、本手法はそれらの多くに適用可能と考えられ、かつ、差共鳴を用いる必要がないので、水平、垂直のチューンに自由度をもたせることが可能である。

近年、検討されつつある超低エミッタンスリングでは、バンチ内の電子の高密度化に伴う内部散乱の増大が、エミッタンスやエネルギー広がり悪化、Touschek 寿命の短縮を引き起こす。そこで、電子密度を緩和する手法の一つとして、フルカップルでの運転が検討されている^[2]。しかし、フルカップルでは、入射ビームの水平振動が垂直振動に変換され、狭ギャップとなっている挿入光源に衝突してしまう恐れがあるが、この手法では、必要な AC-SQ の強度が弱く、ストリップラインキッカー等によるパルス運転が可能であることを利用して、入射バケットのみ、またはその近辺のみ AC-SQ を停止し、入射バケットについては、x-y 結合を解くことにより、このような問題は解決可能と考える。

ストリップラインキッカーの例を Fig. 6 に示す。また、Pulsed AC-SQ を用いて CW の AC-SQ を打ち消すには、Pulsed AC-SQ を CW AC-SQ で挟むシケイン状のセクションを用いれば良い。Fig. 6 において、キッカーのストリップライン長を 1m とした場合に、 $K_0 = 0.01$ を発生するために必要な電圧はピーク値で 2.5 kV であるが、入射時のみ駆動するパルス運転であるので、実現の可能性は高い。1m の長さのストリップラインキッカーは、5-6 バケットに AC-SQ の影響を与えてしまうが、全体のバケット数 ~ 2000 に比べて少ないので、たとえば放射光利用に与える影響等は、十分に小さいと考えられる。

なお、このストリップラインキッカーの電極配置は、多くのリングにおいて、チューン測定用のストリップラインキッカーとして用いられている配置であるので、本原理の検証試験は、多くの既存のリングで可能と考えられる。

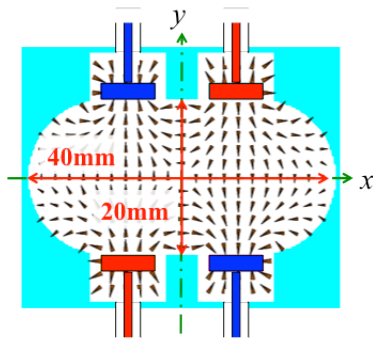


Figure 6 : Example of stripline kicker for pulsed operation of AC-SQ for cancelation of CW AC-SQ just at the neighborhood of injected bucket. Beam passes through the center of the figure.

4. 水平・垂直エミッタンスの交換

4.1 必要な AC-SQ の強度

AC-SQ を、エネルギー交換の半周期だけ駆動した場合、水平の振動エネルギーが垂直の振動のエネルギーへと変換されたところでエネルギー交換が停止する。すなわち、水平と垂直のエミッタンスが交換され、電子蓄積リングの場合、通常の横長から、縦長へと変化させることができる。ここでも競合するのは、放射減衰などの緩和時間であり、水平エミッタンスを低減するためには、この緩和時間より、エネルギー交換時間を十分に短くとる必要がある。すなわち、大きな K_0 を用いる必要がある。

Fig. 6 は、AC-SQ の K_0 の値を変えて、 $t=0$ から各 K_0 に対応した時間間隔 $T_c/2$ のみ駆動した場合のエミッタンスの変化を示している。 K_0 が大きいほど、放射減衰などの緩和の影響が小さく、より水平方向エミッタンスが低減されることがわかる。

もちろん、必要なエミッタンス比が得られたところで AC-SQ を停止すれば、そのエミッタンス比のビームが生成される。ここで、 T_c は、ms のオーダーの時間であるので、通常の AC 磁石やパルス磁石で実施可能である。

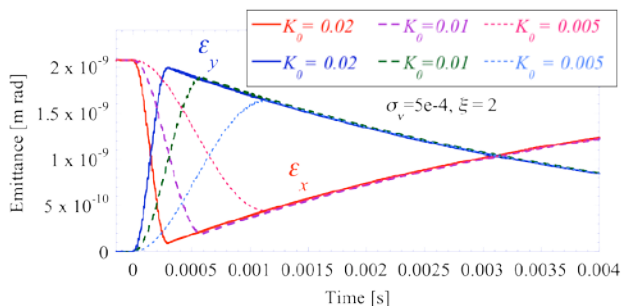


Figure 6 : Horizontal emittance (ϵ_x) and vertical emittance (ϵ_y) exchange by pulsed operation of AC-SQ. AC-SQ is turned on with K_0 values ($K_0 = 0.02, 0.01, 0.005$) at $t = 0$ and turned-off at $t = T_c/2$ corresponding to each K_0 values. Tune spread is $\sigma_v = 5 \times 10^{-4}$ and chromaticity is 2 for horizontal and vertical.

4.3 応用例

入射器をリング加速器に用いている場合、位相空間のマッチングを図ることが可能となる。たとえば、入射器において、本手法によりエミッタンス交換を行うことにより、水平方向のビームサイズを低減すれば、蓄積リングへの入射の際に、ビーム中心間の距離が低減可能となり、入射振幅の低減が可能となる。これにより入射ビームに対する非線形要素の影響が低減され、入射効率の向上につながる。

また、蓄積リング FEL^[4] では、ビームのエネルギー広がり問題となるが、これを解決する方法として、ディスパージョンのあるところに、その強度に水平勾配をもたせたアンジュレータを設置し、各エネルギーに適したアンジュレータ強度を適用する手法が考えられている。ここで問題となるのは、電子ビームのもつ水平方向エミッタンスによるビームの水平広がりとの競合であるが、本手法を用いて、一時的ではあるが、水平方向のビームサイズを低減することができ、この問題が解決される。これは、垂直方向にディスパージョンを作る手法^[4] にくらべて容易に実現可能と考えられる。

5. まとめ

AC 駆動された Skew 4 極を用いることにより、これまで必須とされていた差共鳴をもちいることなしに、フルカップルまで、x-y 結合を生成する手法を提案し、そのための AC 磁石やキッカが製作可能な範囲であることを示した。これにより、リングの運転パラメータに自由度がまし、また、必要な Skew 4 極の強度が弱く、パルス駆動が可能であることを利用し、ビームの部分的な結合の制御や、水平・垂直エミッタンスの交換による、水平方向のビームサイズの低減の可能性を示した。

x-y 結合やこの応用について、御議論、コメントをいただきました、JASRI 加速器部門の高雄勝、早乙女光一、下崎義人、正木満博の各位、ならびに、兵庫県立大学の庄司善彦氏ら、関係各位に感謝いたします。

参考文献

- [2] 中村剛、"差共鳴によらない X-Y 結合生成と USR への応用"、日本物理学会第 68 回年次大会予稿集 (2013).
- [2] M. Borland, "Exploration of a Tevatron-Sized Ultimate Light Source", FLS2012 (2012). <https://www.jlab.org/conferences/FLS2012/talks/Wed/Borland.pdf>
- [3] The emittance exchange schemes are summarized in A. Chao, "Gymnastics in Phase Space", SLAC-PUB-14832
- [4] Y. Cai, Y. Ding, R. Hettel, Z. Huang, L. Wang, L. Xiao, "An X-ray Free Electron Laser Driven by an Ultimate Storage Ring", Synchrotron Radiation News, Vol. 26. No.3 (2013), also <http://slac.stanford.edu/pubs/slacpubs/15250/slac-pub-15380.pdf>.