

複数 BPM による横方向フィードバックの安定化とその特性

STABILIZATION OF HIGH GAIN TRANSVERSE FEEDBACK BY MULTIPLE BPMS

中村 剛

Takeshi Nakamura

Japan Synchrotron Radiation Research Institute

Abstract

A transverse feedback for betatron oscillation is now an indispensable device for stabilization of beam instabilities and fast damping of excited betatron oscillation. However, if the gain of an usual feedback system with single BPM is increased to some level, the feedback becomes unstable by itself and drives the betatron oscillation. In this report, the analysis of the instability of transverse feedback systems and its intuitive explanation is described. Then the new method of feedback with multiple BPMS is proposed to increase the gain further beyond this limit.

1. はじめに

蓄積リングのベータatron振動の減衰に用いられる横方向フィードバックは、ビーム不安定性の抑制には不可欠であり、かつ、入射などの際に生じるベータatron振動を高速で減衰させることにより、ビームの実効サイズの低減をもたらしている[1]。

通常の横方向フィードバックでは、リングの一箇所のビーム位置モニタ(BPM)でターン毎にビームの位置を取得し、その履歴から、ベータatron振動の減衰に必要なキック量を計算してビームをキックしているが、ゲインを増大させると、このフィードバック自体が不安定となり、ビームの振動を励起することがシミュレーションなどで確認されている。この不安定化を避けるために複数個の位置モニタ(BPM)を用いた手法を提案しシミュレーションで有効性を確認したが[2]、ここでは、この不安定化の原因を探るとともに、複数 BPM のフィードバックの安定性に対する理論的な根拠を与えることにする。

2. ベータatron振動の正規化

ベータatron振動を正規化しておく。リング中でのベータatron振動は、一般的に、

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K(s)x = 0 \quad (1)$$

として記述される。ここで、 x はビームの位置、 $K(s)$ は、種々の磁石による線形の収束力を表す。これに対して、

$$\eta = x/\sqrt{\beta}, \quad d\phi = ds/\beta \quad (2)$$

の変換を用いて

$$\frac{d^2\eta}{d\phi^2} + \eta = 0 \quad (3)$$

と正規化する。独立変数 ϕ は通常の正規化[3]と比べて、チューン倍となっている。また

$$\eta' = d\eta/d\phi \quad (4)$$

とおくと $(\eta, \eta')^T$ の位相空間での運動は単なる回転となり、ベータatron位相差 $\phi_2 - \phi_1$ をもたらす運動は、

$$\begin{pmatrix} \eta(\phi_2) \\ \eta'(\phi_2) \end{pmatrix} = R(\phi_2 - \phi_1) \begin{pmatrix} \eta(\phi_1) \\ \eta'(\phi_1) \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$R(\phi_2 - \phi_1) = \begin{pmatrix} \cos(\phi_2 - \phi_1) & \sin(\phi_2 - \phi_1) \\ -\sin(\phi_2 - \phi_1) & \cos(\phi_2 - \phi_1) \end{pmatrix} \quad (6)$$

で表される。また、Twiss parameter

$$\beta, \quad \alpha = -\beta'/2, \quad \gamma = (1 + \alpha^2)/\beta \quad (7)$$

をもちいて、

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \quad (9)$$

となる。なお、 $(x, x')^T$ 空間での位相 ϕ_1 の点1から位相 ϕ_2 の点2までの輸送マトリックス M_{21} は、

$$R(\phi_2 - \phi_1) = T_2 M_{21} T_1^{-1} \quad (10)$$

と変換される。ここで、 T_1, T_2 は、それぞれ、点1、点2での Twiss parameter を用いた T である。

3. 複数個 BPM フィードバックの解析

フィードバックの配置を Fig. 1 とする。ここで、 $(x(n), x'(n))^T$ は、 n 番目のターンでのキッカー直前での値、 x_m, ϕ_m は、それぞれ、BPM でのビーム位置および BPM からキッカーまでの位相である。 $\phi = 2\pi\nu$, $\phi_0 = 2\pi\nu_0$ は、それぞれ、フィードバックが有る時と、無い時の1ターンのベータatron位相を表しており、 ν, ν_0 はそれぞれチューンとなる。また、 K_m は、BPM からのビーム位置 x_m をもとに生成されたキッカーでのキック量を示す。また、キッカーおよび BPM での Twiss parameter をそれぞれ (β, α, γ) および $(\beta_m, \alpha_m, \gamma_m)$ とする。

この時、ビームの運動は、Fig. 1 から

$$\begin{pmatrix} x(n+1) \\ x'(n+1) \end{pmatrix} = M_0 \left(\begin{pmatrix} x(n) \\ x'(n) \end{pmatrix} + K_m(n) + F(n) \right) \quad (11)$$

となる。ここで、 M_0 は、フィードバックが無いときのリング1ターンの輸送マトリックス、 $F(n) = (0, \theta_F(n))^T$ は外部励起によるキックである。次に、これを拡張して、Fig. 2 のように、 M 個の BPM を用いる場合を考える。以下では、下付きの m により、 m 番目の BPM の位置データであることを示す。

nakamura@spring8.or.jp

$$T\tilde{K} = \tilde{\beta}\tilde{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_R & A_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{\eta}' \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$\tilde{P} = \sum_{k=1}^N p_k \lambda^{-k} \quad (31)$$

となる。ここで $\tilde{\beta} = \sqrt{\beta\beta_0}$ である。また、 $F(n) = \lambda^n \tilde{F}$ とおいて、

$$T\tilde{F} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\theta}_f \end{pmatrix} = \sqrt{\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\theta}_f \end{pmatrix} \quad (32)$$

としている。これらを用いて、Eq. (29) を整理すると、

$$H(\lambda) \begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{\eta}' \end{pmatrix} = \sqrt{\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\theta}_f \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$H(\lambda) = \lambda R_0^{-1} - \left(I + \tilde{\beta}\tilde{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_R & A_I \end{pmatrix} \right) \\ = \begin{pmatrix} \lambda \cos \phi_0 - 1 & -\lambda \sin \phi_0 \\ \lambda \sin \phi_0 - \tilde{\beta}A_R\tilde{P} & \lambda \cos \phi_0 - (1 + \tilde{\beta}A_I\tilde{P}) \end{pmatrix} \quad (34)$$

が得られる。これから外力に対する応答は、

$$\begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{\eta}' \end{pmatrix} = H(\lambda)^{-1} \sqrt{\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\theta}_f \end{pmatrix} \quad (35)$$

となる。このとき、

$$\lambda = e^{i\phi} \quad (36)$$

と置くことにより、周期的な外力に対する応答とすることが出来る。また、分散関係 $\det H(\lambda) = 0$ は、

$$\lambda^2 - 2(\cos \phi_0 + C\tilde{G})\lambda + 1 + 2A_I\tilde{G} = 0 \quad (37)$$

$$C = A_R \sin \phi_0 + A_I \cos \phi_0 \quad (38)$$

$$\begin{pmatrix} \cos \phi - \cos \phi_0 \\ g \sin \phi \end{pmatrix} = U(\phi) \begin{pmatrix} G_R(\phi) \\ G_I(\phi) \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$U(\phi) = \begin{pmatrix} A_R \sin \phi_0 - A_I(\cos \phi - \cos \phi_0) & -A_I \sin \phi \\ A_I \sin \phi & A_R \sin \phi_0 - A_I(\cos \phi - \cos \phi_0) \end{pmatrix} \quad (48)$$

が得られる。さて、まず、通常の1つの BPM でのフィードバックの場合を考える。このとき、 $\beta_M = \beta_1$ とおいて

$$a_m \sqrt{\beta_M/\beta_m} = \delta_{m,1}, \quad y(n) = x_1(n) \quad (49)$$

となり、そして、

$$A_R + iA_I = e^{-i\phi_1} = \cos \phi_1 - i \sin \phi_1 \quad (50)$$

となる。チューンシフト 0 に抑える、すなわち $\phi = \phi_0$ の条件を課すと、

$$U = \begin{pmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 \end{pmatrix} \quad (51)$$

$$\begin{pmatrix} G_R \\ G_I \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ g \sin \phi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi_1 \\ \cos \phi_1 \end{pmatrix} g \quad (52)$$

となつて、

$$\tilde{G}(\phi_0) = g e^{i(\phi_0 + \frac{\pi}{2})} = \begin{cases} |g| e^{i(\phi_0 + \frac{\pi}{2})} & g \geq 0 \\ |g| e^{i(\phi_0 - \frac{\pi}{2})} & g < 0 \end{cases} \quad (53)$$

が得られ、ゲインおよび BPM からキッカーの位相差 ϕ に応じた FIR フィルタの係数 p_k を用いることにより、振動の励起・減衰が可能となる。また、Eqs. (47), (48) から、フィードバックが引き起こすチューンシフトの量とゲインの関係がわかる。

$$\tilde{G} = G_R + iG_I = \frac{1}{2} \tilde{\beta}\tilde{P} \quad (39)$$

となり、これを解くことにより λ が得られる。但し、これらの式から λ を求める際に、 \tilde{G} は λ の関数であることから、iteration などを用いる必要がある。Eq. (37) は λ の2次式なので解が2つあるが、 \tilde{G} を評価する際に用いた方の λ を解として取り上げて iteration を進めていくことになる。

さて、解をフィードバックによる振動の成長率/減衰率および振動の位相のシフトにより表すことにする。2次方程式の解は、一般的に

$$\lambda_{\pm} = e^{\tilde{\kappa}} e^{\pm i(\phi_R + i\phi_I)} = e^{\kappa_R \mp \phi_I} e^{i(\kappa_I \pm \phi_R)} \quad (40)$$

で表すことができる。ここで、 $\tilde{\kappa} = \kappa_R + i\kappa_I$ とし、 $\kappa_R, \kappa_I, \phi_R, \phi_I$ は実数である。これから 1 ターン当たりの成長率 g およびベータトロン位相の進み ϕ はそれぞれ、

$$g = \kappa_R - \phi_I, \quad \phi = \kappa_I + \phi_R \quad (41)$$

となる。これらを用いて解は

$$\lambda_+ = e^{g+i\phi}, \quad \lambda_- = e^{-(g+i\phi)} e^{2\tilde{\kappa}} \quad (42)$$

と表すことができ、さらに、解と係数の公式から、

$$\lambda_+ \lambda_- = e^{2\tilde{\kappa}} = 1 + 2A_I \tilde{G} \quad (43)$$

$$\lambda_+ + \lambda_- = e^{g+i\phi} + e^{-(g+i\phi)} e^{2\tilde{\kappa}} = 2 \cos \phi_0 + 2C\tilde{G} \quad (44)$$

が得られる。ここで、 $|\tilde{\kappa}| \ll 1$ の場合を考えると、

$$\tilde{\kappa} = A_I \tilde{G} \quad (45)$$

と近似でき、さらに $|g| \ll 1$ と仮定すると、

$$\cos \phi + ig \sin \phi + A_I \tilde{G} e^{-i\phi} = \cos \phi_0 + C\tilde{G} \quad (46)$$

が得られ、これから、

4. 1 BPM のフィードバックと安定性

1BPM でのフィードバックの例として、チューンを 0.15、とし、さらにキッカーと BPM は同じ場所にあり $\phi_1 = 0$ とする。キックを計算する FIR フィルタは、 p_k を係数とするものであり、例として 9 ターンの位置の履歴を用いたもの、すなわち 9-tap の FIR フィルタ[1]、としてその係数 p_k を Fig. 3 に、そして、その位相、ゲインのチューン依存性を Fig. 4 に示す。係数は、ターゲットのチューン $\phi_0 = 2\pi\nu_0$ においてゲインは 1 となるように正規化され、また、そこでの位相は -90 度とし、最大の減衰が得られるものとしている。

このフィードバックの高ゲイン時の挙動を調べる。Fig. 5 は、ターン 0 でパルスキックを与えたときのトラッキング計算の結果である。ゲイン G は、Eq. (53) と同様に g すなわち減衰時間の逆数で示しており、図中の T は減衰時間は 1 ターンを単位としていることを示している。 $1/G = 4T$ 、すなわち、減衰時間が 4 ターン相当のゲインでは、本来のチューンより低周波の振動が発生・継続していることがわかる。さらに $1/G=3.5T$ では、その振動が成長していくことがわかる。ビームの周期的外力に対する応答について、トラッキングの結果をフーリエ変換したものと、Eq. (35) を用いて計算した結果を Fig. 6 にしめす。両者

はよく一致していることがわかる。周波数特性では、ゲインが増大すると、安定領域と不安定領域の境界となるチューンにピークが現れ、 $1/G=4T$ では、これが顕著となり、外力に対してビームは脆弱となっていることがわかる。

さて、不安定となるチューンは、Eq. (37)により調べてみると安定領域と不安定領域の境界であるので、ゲインが増大することにより、フィードバックが不安定領域までチューンシフトを引き起こし、それにより自分自身が不安定となっているとのモデルが考えられる。まず、Eqs. (47), (48)から Fig. 4 に示されている安定領域の境界 ($g = 0$)でのチューン $\nu_L = \phi_L/2\pi$ および $\nu_H = \phi_H/2\pi$ が計算でき、さらに、そのチューンまでチューンシフトを引き起こすために必要な $\tilde{G}(\phi)$ (ここでは $\tilde{G}(\phi_L) = G_L + 0i$ および $\tilde{G}(\phi_H) = G_H + 0i$)が求まる。この値と、Fig. 4 から、ターゲットとなるチューン $\nu_0 = 0.15$ でのゲインが求まり、不安定となる際の減衰率が計算できる。この場合、 ν_0 から ν_L までチューンシフトを引き起こすゲイン $\tilde{G}(\phi_L)$ から計算される ν_0 でのゲインの値 G_0 のほうが小さく、 ν_H よりも先に不安定になることが判明している。このモデルで求めた不安定となるゲインとチューンはそれぞれ、 $1/G = 3.8$ Turn、 $\nu = 0.056$ であり、シミュレーションや厳密解 (Eq. (37))と一致している。

ここでは、9ターンの位置を入力とした9-tap FIR フィルタを例としたが、他の色々な FIR フィルタを用いた場合も、安定性が保たれる最大のゲインの値は大きく変わることはないことが確認されている。

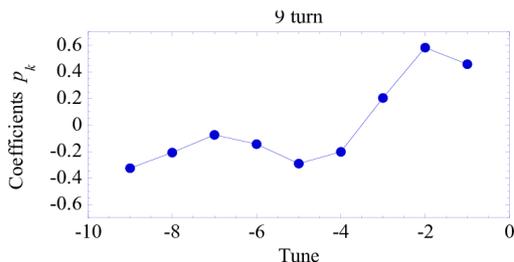


Figure 3: 9 turn (9-tap) FIR filter coefficients to calculate kick.

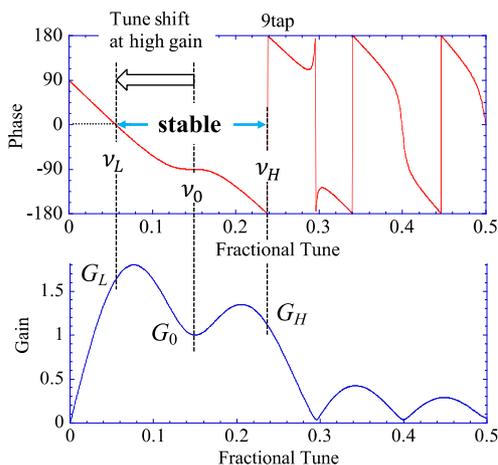


Figure 4: Tune response of the 9-tap FIR filter : Phase(top) and Gain(bottom).

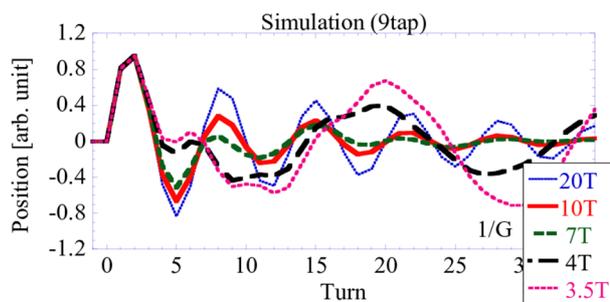


Figure 5: Response of a beam to a pulsed kick at 0-th turn. Gain G is shown with the damping time measured with turn.

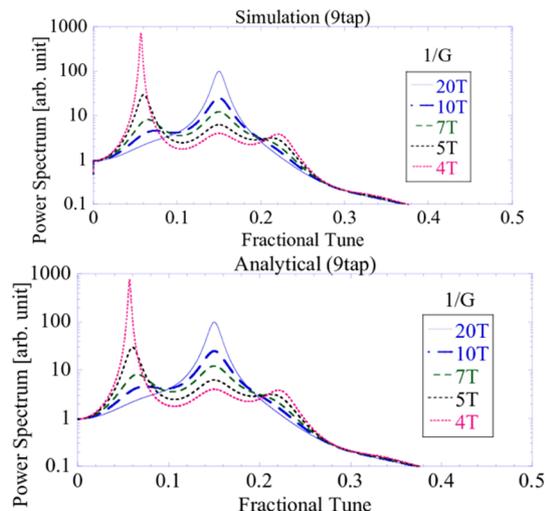


Figure 6: Beam response for external force with simulation (top) and with Eq. (33) (bottom).

5. 複数の BPM のフィードバックと安定性

前述の 1BPM でのフィードバックの不安定化は、キックの計算に用いているターン毎の位置には、ターン毎のキックの影響が含まれており、そこでループが発生して不安定となっているとみなせる。そこで、複数個の BPM を用いて 1 ターンで次のキックを計算すれば、このループは生じない、言い換えればフィードバックがチューンシフトを生成しても、フィルタ a_m の出力には影響しないので、1BPM で発生する不安定化のメカニズムが生じず、より高いゲインでのフィードバックが可能となると期待できる。

例として 4 つの BPM の 1 ターンでの位置データに対してフィルタ a_m によりキック量を計算するとし、さらに、その出力に対してハイパスフィルタ p_k を適用してフィルタ a_m の出力に含まれるベータatron振動に依存せず一定の値となる成分(以下オフセット)を除去する。BPM の信号には、振動の情報以外に、各々の BPMでの電極応答のアンバランスや COD の変動、位置検出回路のドリフトなどにより生じるオフセットが含まれる。このオフセットは、その値が固定されていれば原理的にはフィルタ a_m を適切に設定することで除去可能であるが、オフセット自体がドリフトする可能性があるため、このハイパスフィルタ p_k を用いる。これは、オフセットが大きくなった場合にシステムが飽和するのを避けるためである。4 つの BPM のベータatron位相は、互いに 90 度程度、ずれていることが望ま

しい。なお、BPM の数の増加は、高いゲインのフィードバックに必須となる低ノイズ化につながる。なお、アナログフィードバックは、2 つの BPM の情報をアナログ回路を用いて計算した場合に相当するが、アナログ回路ではハイパスフィルタが実現できないため、このオフセットの除去が困難となる。

これらのフィルタの係数を Fig. 7, 8 位相、ゲインのチューン依存性を Fig. 9, 10 に示す。この複数 BPM のフィードバックに対して Eq. (37) で求めた不安定化するゲインおよびそのときのチューンは、 $1/G = 1.08$ 、 $\nu = 0.018$ である。

単発のキックに対するビームの応答のシミュレーション結果を Fig. 11 に示す。また、周期的外力に対する応答についてのシミュレーションおよび Eq. (35) の結果を Fig. 12 に示す。 $1/G = 1.1T$ などの高いゲインで低いチューンにピークが見られるが、これは、ターン毎の履歴を元に計算しているフィルタ p_k の影響と考えられる。

複数 BPM のフィードバックの場合、ゲインを $1/G = 1.1T$ の場合でも安定であり、外力に対しても 1BPM の $1/G=4T$ の場合より小さい振幅となっている。なお、Fig. 11 では、ゲインが $1/G = 1T$ においてチューン 0.5 の振動が見られるが、これは、キック角がビームの傾きの 2 倍となる場合に相当し、理想的なフィードバック、すなわち、キックがビームの傾き角に比例する場合にも出現する。

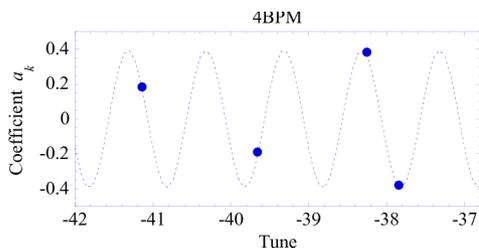


Figure 7: Coefficients of FIR filter a_m for calculation of kick from position data of four BPMs. The location of BPMs are shown with the relative tune from the kicker.

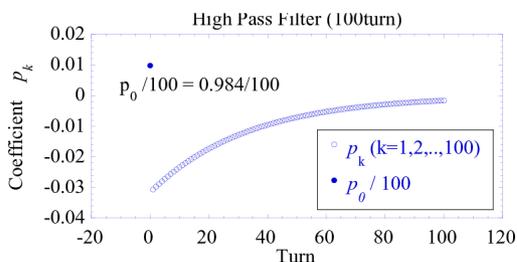


Figure 8: Coefficients of FIR filter p_k for high pass filter.

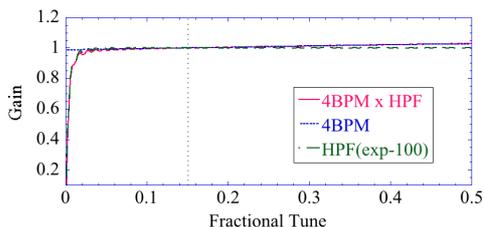


Figure 9: Tune response of the gain of FIR filters.

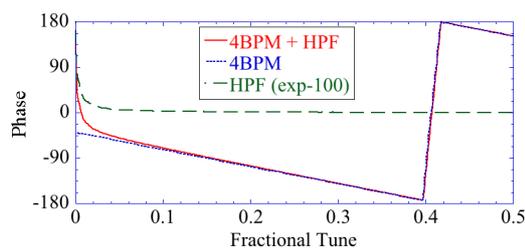


Figure 10: Tune response of the phase of FIR filters.

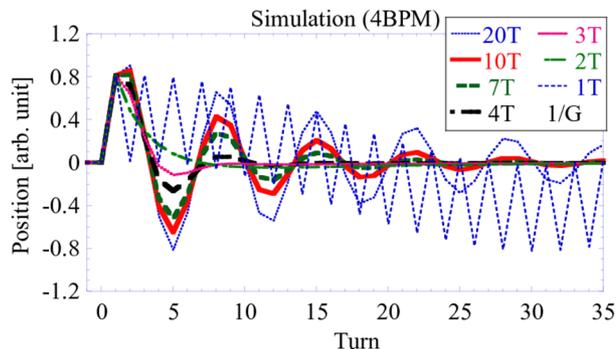


Figure 11: Response of a beam to a pulsed kick at 0-th turn. Gain G is shown as the inverse of the damping time measured with turn.

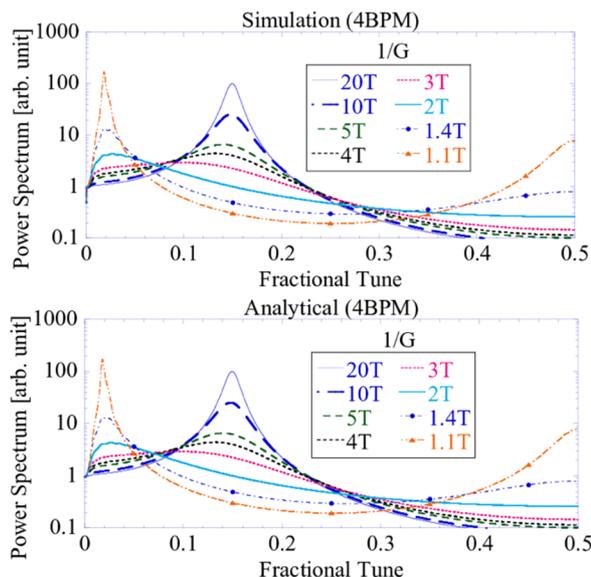


Figure 12: Beam response for external force with simulation (top) and with Eq. (33) (bottom).

参考文献

- [1] 例として T. Nakamura, S. Date, K. Kobayashi, T. Oshima, Proc. Of EPAC2004 (2004); <https://accelconf.web.cern.ch/accelconf/e04/PAPERS/THP LT068.PDF>
- [2] T. Nakamura, “日本物理学会 第 71 回年次大会(2016 年)概要集”, 19aAQ-4 (2016).
- [3] 例として S. Y. Lee, “Accelerator Physics”, World Scientific, ISBN-13: 978-9814374941 (First edition published 1999).