

粒子線治療用ビーム形状の回転ガントリ角度依存性解析

STUDY OF GANTRY ANGLE DEPENDENCY OF BEAM SHAPE FOR PARTICLE BEAM THERAPY

青木孝道^{#, A)}, えび名風太郎^{A)}, 梅澤真澄^{A)}, 野村拓也^{A)}, 遠竹聡^{A)}

Takamichi Aoki^{#, A)}, Futaro Ebina^{A)}, Masumi Umezawa^{A)}, Takuya Nomura^{A)}, Satoshi Totake^{A)}

^{A)} Hitachi, Ltd.

Abstract

In recent years, scanning irradiation method spreads in particle beam therapy. It is important for conformal irradiation that reproducibility of beam position and spot shape. A purpose of this research is to derive new optical design guideline for rotating gantry beam transport of particle beam therapy. The beam position variation and spot shape is formulated by components of variance-covariance matrix in phase space. By this formulation, behaviors of these parameters are analyzed based on linear beam optics. A result of the study; 1) the beam position variation is proportional to ratio of covariance of longitudinal displacement and transverse displacement, and covariance of longitudinal displacement and momentum deviation, 2) the beam position variation behave in beam transport as same as dispersion functions, 3) the spot shape is able to be independent on gantry angle if difference of phase advances of betatron oscillation in horizontal and vertical in gantry beam transport is $n \cdot \pi$. In conclusion, the gantry beam transport is suitable for scanning irradiation if it is achromatic and its phase advance difference is $n \cdot \pi$.

1. 動機と目的

がん治療の一種である粒子線治療では、加速器で生成された粒子線のがん腫瘍などの照射対象に照射する。照射対象に任意の角度から粒子線を照射するために回転ガントリ輸送系が用いられる[1]。回転ガントリ輸送系では固定輸送系との接続点におけるビーム軌道を軸として下流の輸送系を回転させ、照射対象への照射方向を制御することができる。近年スキャニング照射法の発展に伴い、照射対象の形状に一致した線量分布を形成するためには照射ビームの位置変動を抑制しつつ、形状をガントリ角度に依らず一定に保つことが必要である。

本研究の目的は、ビームの位置変動とビームの形状の輸送系における振る舞いを線形光学[2]に基づき定式化し、粒子線治療に好適な輸送系の設計指針を導くことである。そのために、粒子線治療での重要なパラメータであるビーム位置変動とビームの形状を位相空間上の分散共分散行列の成分で表現した。さらに、線形光学計算を元に、それらのパラメータの輸送系中の振る舞いを導出した。この変換からビームの位置変動を抑制しつつ、ビームの形状をガントリ角度に依らず一定と保つための条件を導出した。

2. 着目量の定式化

2.1 位相空間と分散共分散行列

本研究では6次元の位相空間上における光学計算を元に、従来考察されていなかった照射点におけるビーム形状のガントリ回転角依存性を光学計算によって解析した。本節ではビームパラメータの内、粒子線治療ビーム重心を原点とする六次元位相空間を定義し、各粒子の位相空間上の位置をベクトル \mathbf{x} にて表す。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ z \\ \delta \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ただし、 x と y はビームの軌道に対して垂直な二方向の粒子の変位であり、 z はビームの中心から見た前後方向の位置ずれであり、 x' と y' はそれぞれ x と y のビーム軌道に沿った微分であり、 δ は運動量変位 $\Delta p/p$ である。ある輸送系に対して位相空間上の位置 \mathbf{x}_i で入射された粒子について、その輸送系の出口における位相空間上の位置 \mathbf{x}_f は

$$\mathbf{x}_f = \mathbf{R}\mathbf{x}_i \quad (2)$$

によって与えられる。但し、行列 \mathbf{R} は当該輸送系の輸送行列である。ここでは、輸送行列の線形成分のみを考えることとする。

さらに、ビームを構成する粒子それぞれの位置 \mathbf{x} から六次正方行列の分散共分散行列 $\mathbf{\Sigma} = (\sigma_{ij})$ を構成できる。行列 $\mathbf{\Sigma}$ の各成分は

$$\sigma_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \langle x_i \cdot x_j \rangle \quad (3)$$

である。但し、角括弧は粒子の全組み合わせにわたる平均を表す。本研究では、ビームの重心を位相空間上の原点とするため、分散共分散行列 $\mathbf{\Sigma}$ の対角成分は各成分の分散であり、非対角成分は共分散である。分散共分散行列 $\mathbf{\Sigma}$ の輸送系における輸送前後の変化は

$$\mathbf{\Sigma}_f = \mathbf{R}\mathbf{\Sigma}_i\mathbf{R}^t \quad (4)$$

である。

2.2 位相空間上の楕円と分散共分散行列の関係

ビームを構成する各粒子が位相空間上で正規分布すると仮定した場合、粒子の存在確率の等確率面は六次元楕円球面となる。1 σ の変位を内包する楕円球面の方程

[#] takamichi.aoki.my@hitachi.com

式は

$$\mathbf{x}^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x} = 1 \quad (5)$$

である。但し、行列 $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ は行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ の逆行列である。この楕円を任意の二つの位相空間座標 (x_i, x_j) によって貼られる平面に射影した二次元楕円(以下、射影楕円 projected ellipse と呼ぶ)を考える。分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ の第*i*および第*j*成分から構成される小行列 $\boldsymbol{\Sigma}'(i, j)$

$$\boldsymbol{\Sigma}'(i, j) = \begin{pmatrix} \sigma_{ii} & \sigma_{ij} \\ \sigma_{ji} & \sigma_{jj} \end{pmatrix} \quad (6)$$

を用いて、射影された楕円の方程式は

$$(x_i \ x_j) \{ \boldsymbol{\Sigma}'(i, j) \}^{-1} \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix} = 1 \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{jj} x_i^2 - 2\sigma_{ij} x_i x_j + \sigma_{ii} x_j^2 = \sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij}^2$$

を得る。一方、六次元楕円球を同じく位相空間座標 (x_i, x_j) によって貼られる平面によって切断した切断面もまた楕円(以下、切片楕円 intercept ellipse と呼ぶ)となり、その方程式は式(5)に x_i, x_j 以外の座標を 0 とすることで容易に得られ、

$$\sigma_{ii}^{-1} x_i^2 + 2\sigma_{ij}^{-1} x_i x_j + \sigma_{jj}^{-1} x_j^2 = 1 \quad (8)$$

である。但し、 σ_{ij}^{-1} は行列 $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ の (i, j) 成分である。以上二種の楕円について、重要な座標値の分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ の成分との関係を Figure 1 および 2 に示す。

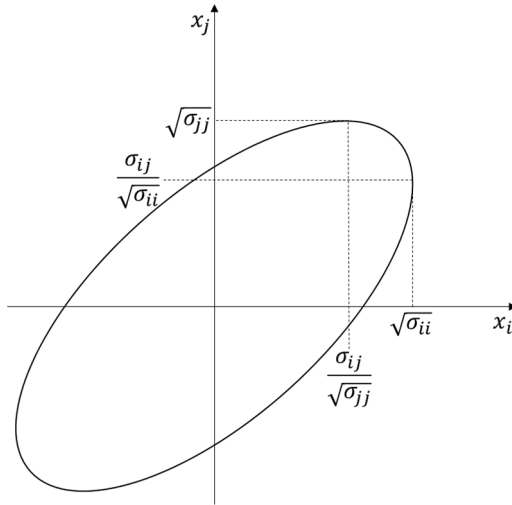


Figure 1: Projected Ellipse.

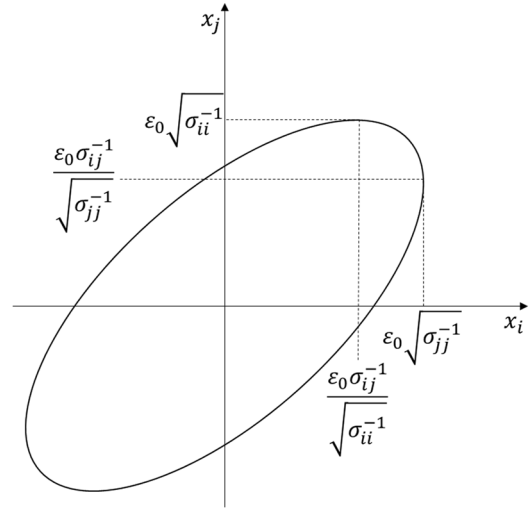


Figure 2: Intercept Ellipse.

さらに、一般に切片楕円の方程式が Twiss parameter を用いて

$$\gamma_0 x_i^2 + 2\alpha_0 x_i x_j + \beta_0 x_j^2 = \epsilon_0 \quad (9)$$

となることから、係数比較により行列 $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ の成分と Twiss parameter およびエミッタンスとの関係

$$\begin{cases} \epsilon_0 = \sqrt{\sigma_{ii}^{-1} \sigma_{jj}^{-1} - (\sigma_{ij}^{-1})^2} \\ \beta_0 = \sigma_{jj}^{-1} \epsilon_0 \\ \alpha_0 = \sigma_{ij}^{-1} \epsilon_0 \\ \gamma_0 = \sigma_{ii}^{-1} \epsilon_0 \end{cases} \quad (10)$$

を得ることができる。また、射影楕円に対して同様の比較を行うと射影 Twiss parameter、あるいは射影エミッタンスとも言うべき Twiss parameter およびエミッタンスと類似するパラメータを導入できる。

$$\begin{cases} \epsilon = \sqrt{\sigma_{ii} \sigma_{jj} - (\sigma_{ij})^2} \\ \beta = \sigma_{ii} / \epsilon \\ \alpha = -\sigma_{ij} / \epsilon \\ \gamma = \sigma_{jj} / \epsilon \end{cases} \quad (11)$$

2.3 分散関数と分散共分散行列の関係

分散関数とその類似パラメータも分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ から計算可能である。位置と運動量変位 (x_1, x_6) で張られる位相空間平面に対する射影楕円を考える。分散関数 η_x は運動量変位の最大値とその運動量を取る位置との比で与えられるため、

$$\eta_x = \frac{\sigma_{16}}{\sigma_{66}} \quad (12)$$

となる。同様に、

$$\begin{cases} \eta'_x = \sigma_{26} / \sigma_{66} \\ \eta_y = \sigma_{36} / \sigma_{66} \\ \eta'_y = \sigma_{46} / \sigma_{66} \end{cases} \quad (13)$$

を得る。さらに、ビームの位置や傾きのスプールの変動を考える際に有用なパラメータとして分散関数に類似するパラメータ ζ として導入する。

$$\begin{cases} \zeta_x = \sigma_{15}/\sigma_{65} \\ \zeta'_x = \sigma_{25}/\sigma_{65} \\ \zeta_y = \sigma_{35}/\sigma_{65} \\ \zeta'_y = \sigma_{45}/\sigma_{65} \end{cases} \quad (14)$$

進行(z)方向変位を時間と同一視し、空間的な変位とビームの傾きの時間的変化 σ_{i5} ($i = 1,2,3,4$)と運動量の時間的変化 σ_{65} との比を取ることによって下記に示すように、これらのパラメータ ζ は空間的な変位とビームの傾きの時間的変化に比例しつつ輸送系において分散関数と同じ振る舞いをする。以下ではパラメータ ζ を時間分散関数と呼ぶことにする。

時間分散関数の輸送による変換式を下記で導出する。式(4)より分散共分散行列 Σ の各成分について

$$(\sigma_f)_{ij} = \sum_{1 \leq k, l \leq 6} (\sigma_f)_{kl} R_{ik} R_{jl} \quad (15)$$

である。以下では輸送行列 \mathbf{R} の形として、静磁場のみ存在する輸送系を考え、

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & 0 & R_{16} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & 0 & R_{26} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} & 0 & R_{36} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & 0 & R_{46} \\ R_{51} & R_{52} & R_{53} & R_{54} & 1 & R_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

を仮定する。また位相空間中の変位量について、粒子線治療用シンクロトロンにおいて課題となりえる、数 ms 数 s の取り出し時間中のビーム位置変動をモデル化するため、第五成分が 10^5 m オーダの変位となる。他の位相空間成分は mm オーダあるいは mrad オーダである。このことを考慮すると、分散共分散行列 Σ について、

$$\begin{cases} \sigma_{55} \gg |\sigma_{i5}(i = 1,3)| \gg |\sigma_{ij}(i, j = 1,3)| \\ |\sigma_{i5}(i = 2,4,6)| \gg |\sigma_{ij}(i, j = 2,4,6)| \end{cases} \quad (17)$$

とするのが妥当である。さらに、輸送行列 \mathbf{R} に出現する長さの項も m オーダであるので、分散共分散行列 Σ の第五行成分 σ_{i5} に対して、輸送行列の長さスケールははるかに小さい。以上の仮定の下で、式(14)および(15)によって時間分散関数 ζ の輸送による変換を求めると

$$\begin{pmatrix} \zeta_x \\ \zeta'_x \\ \zeta_y \\ \zeta'_y \end{pmatrix}_f = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_x \\ \zeta'_x \\ \zeta_y \\ \zeta'_y \end{pmatrix}_i + \begin{pmatrix} R_{16} \\ R_{26} \\ R_{36} \\ R_{46} \end{pmatrix} \quad (18)$$

を得る。これは分散関数 η と同じ変換である。よって、いわゆるアクロマティックな ($R_{16} = R_{36} = 0, R_{26} = R_{46} = 0$) 輸送系では入射点において、時間分散関数とその勾配を 0 とすることで、出口においても時間分散関数とその勾配を 0 とできる。

2.4 ビーム形状と分散共分散行列の関係

また、実空間上でのビームの形状も分散共分散行列 Σ から計算可能である。横方向の変位(x_1, x_3)で張られる位相空間平面に射影される射影楕円がビーム形状である。この射影楕円について、面積 πS 、長軸長 l_L 、短軸長 l_S 、長軸傾き δ が定義でき、それらの表式を求めると下記となる。

$$\begin{cases} \pi S = \pi \sqrt{\sigma_{11}\sigma_{33} - (\sigma_{13})^2} \\ l_L^2 = \frac{S}{2} (D + \sqrt{D^2 - 4}) \\ l_S^2 = \frac{S}{2} (D - \sqrt{D^2 - 4}) \\ \tan 2\delta = \frac{2\sigma_{13}}{\sigma_{11} - \sigma_{33}} \end{cases} \quad (19)$$

但し、式(19)中の D は

$$D = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{33} - (\sigma_{13})^2}} \quad (20)$$

として定義される無次元量である。

3. 回転ガントリによるビーム輸送

さて、粒子線治療用ガントリ輸送系の光学設計について輸送系の入口と照射点でのビームの Twiss parameter 及び時間分散関数を Table 1 に示す値に定める。

Table 1: Beam Parameters

Parameter	Injection	Isocenter
β_x, β_y [m]	β_i	β_f
α_x, α_y	α_i	α_f
ζ_x, ζ_y [m]	0	0
ζ'_x, ζ'_y	0	0

これらの条件は x 方向と y 方向について同一の条件であり、あるガントリ角度で本条件を満足させれば、任意の角度で本条件を満足できる。あるガントリ角度における輸送行列 \mathbf{R} について

$$\begin{cases} R_{11} = \sqrt{\frac{\beta_f}{\beta_i}} (\cos \psi_x + \alpha_i \sin \psi_x) \\ R_{12} = \sqrt{\beta_i \beta_f} \sin \psi_x \\ R_{21} = -\frac{1 + \alpha_i \alpha_f \sin \psi_x + (\alpha_f - \alpha_i) \cos \psi_x}{\sqrt{\beta_i \beta_f}} \\ R_{22} = \sqrt{\frac{\beta_i}{\beta_f}} (\cos \psi_x - \alpha_f \sin \psi_x) \\ R_{33} = \sqrt{\frac{\beta_f}{\beta_i}} (\cos \psi_y + \alpha_i \sin \psi_y) \\ R_{34} = \sqrt{\beta_i \beta_f} \sin \psi_y \\ R_{43} = -\frac{1 + \alpha_i \alpha_f \sin \psi_y + (\alpha_f - \alpha_i) \cos \psi_y}{\sqrt{\beta_i \beta_f}} \\ R_{44} = \sqrt{\frac{\beta_i}{\beta_f}} (\cos \psi_y - \alpha_f \sin \psi_y) \\ R_{13} = R_{15} = R_{31} = R_{35} = 0 \\ R_{14} = R_{16} = R_{23} = R_{25} \\ = R_{32} = R_{36} = R_{41} = R_{45} = 0 \\ R_{24} = R_{26} = R_{42} = R_{46} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

とすれば十分である。但し、 ψ_x, ψ_y は任意のパラメータである。円形加速器におけるベータatron振動の位相進みのアナロジーで、ここでもベータatron振動位相進みと呼ぶこととする。

さて、このように Twiss parameter と分散関数に関する条件から決まる光学条件を満たす輸送行列はベータatron振動位相進み ψ_x, ψ_y の自由度があるため、無数に存在する。しかしながら、ベータatron振動位相進み ψ_x, ψ_y は照射点におけるビーム形状に関する。式(19)で得られる各パラメータに対して、ガントリ回転角の依存性を考察する。まず、ガントリ回転は入射点におけるビーム軸中心の回転と見做せ、ガントリ回転角 θ に対して回転の輸送行列 $\mathbf{R}_{\text{Rot}}(\theta)$ を

$$\mathbf{R}_{\text{Rot}}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

とできる。すると、ガントリ回転も含めた輸送系全体の輸送行列 $\mathbf{R}_{\text{T}}(\theta)$ は

$$\mathbf{R}_{\text{T}}(\theta) = \mathbf{R}\mathbf{R}_{\text{tot}}(\theta) \quad (23)$$

となる。このことから、式(19)で得られる各パラメータは

$$\begin{cases} \pi S = \pi \beta_f \sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1}{4} \Delta \varepsilon \sin^2 \Delta \psi \sin^2 2\theta} \\ l_L^2 = \frac{\beta_f^2}{2} \left\{ (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \Delta \varepsilon \sqrt{1 - \sin^2 \Delta \psi \sin^2 2\theta} \right\} \\ l_S^2 = \frac{\beta_f^2}{2} \left\{ (\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \Delta \varepsilon \sqrt{1 - \sin^2 \Delta \psi \sin^2 2\theta} \right\} \\ \tan 2\delta = -\cos \Delta \psi \cdot \tan 2\theta \end{cases} \quad (24)$$

となる。但し、 $\Delta \varepsilon$ は x 方向と y 方向のエミッタンスの差 $|\varepsilon_x - \varepsilon_y|$ 、 $\Delta \psi$ は x 方向と y 方向のベータatron振動の位相進みの差 $(\psi_x - \psi_y)$ である。

4. ガントリ輸送系の光学設計指針

上記の議論により、粒子線治療用回転ガントリの光学設計に対する指針を提案する。スキヤニング照射法を用いる粒子線治療においては、患部に照射するビームの形状をガントリ角度に依存しない形状とすることで、治療計画やコミッショニング期間の短縮が可能となりえる。そこで、ここではガントリ角度に対して、ビームの断面形状すなわち、式(24)に示したパラメータのうち、面積 πS 、長軸長 l_L 、短軸長 l_S 、長短軸比 h が不変となる条件について考察する。

上記パラメータをガントリ角度 θ に対して不変となる条件は

$$\Delta \varepsilon = 0 \quad (25)$$

または、

$$\sin \Delta \psi = 0 \quad (26)$$

である。一般に加速器から取り出されるビームのエミッタンスは x 方向と y 方向で異なるため式(25)の条件を満たすのは困難である。一方、式(26)の条件は輸送行列の調整、すなわち輸送系中の四極励磁量を適切に選ぶことで、ビーム性状に依らず実現可能である。すなわち、

$$\psi_x - \psi_y = n\pi \quad (27)$$

とする。但し、 n は整数である。本条件が満たされた場合、ビーム断面の長軸の傾き δ について

$$\delta = -\theta \quad (28)$$

を得る。これは、ガントリ回転に同期してビームも回転する状態であることを示している。この状態ではガントリ回転に対して、ビームは回転するのみで形状は不変となる。これにより、ガントリ回転に伴う治療ビーム形状のばらつきを抑制できる。

5. まとめ

本研究において、以下を導出した。粒子線治療において重要なパラメータである、ビーム位置の時間変動を分散共分散行列の成分によって定式化し、時間分散関数と定義した。それにより、線形輸送光学の手法によって輸送系中の振る舞いが分散関数と同一であることが確認され、結果アクロマティックな輸送系に対して初期値と初期勾配を0とすることで、照射点においてビームの位置変動を消すことができることを導いた。さらに、ビームの形状についても分散共分散行列の成分によって定式化し、ガントリ回転角の依存性を線形光学計算の手法によって解析した。結果、ガントリ輸送系中のベータatron振動の位相進みの差を π の整数倍とすることでビーム形状のガントリ依存性を消すことができることを示した。

以上の特性を踏まえてガントリ輸送系の光学設計をすることで、粒子線治療に好適なビーム位置安定性とガントリ角度に依らないビーム形状を実現できる。

参考文献

- [1] F. Ebina *et al.*, “陽子線治療用小型シンクロトロンの開発”, IEEEJ Transactions on Industry Applications. Vol.136 No.5 pp.312-318 (2016).
- [2] C. M. Merry *et al.*, “Charged Particle Beam Transport for a Cyclotron Facility.” National Accelerator Centre. (1980/06).