

## FEL のブロッホ・ベクトル・モデル BLOCH VECTOR MODEL ON FEL

尾崎俊幸<sup>#</sup>

Toshiyuki Ozaki<sup>#</sup>

Accelerator Facilities, KEK

### Abstract

In quantum computing, the operation is presented using the bloch sphere which is a geometrical representation of the quantum state. This paper discusses the bloch vector model of a free electron laser. The theory is formulated in a moving frame where the longitudinal electron motion is assumed to be non-relativistic. The undulator is treated as a pseudo-radiation field. A quantized Hamiltonian is presented as an interaction between a non-relativistic electron and field.

### 1. はじめに

量子コンピュータの開発競争が活発になっている。近年、加速器による方法[1]も提案されている。イオン列で開発された方法[2]を大規模にしようとした提案である。また、原子レーザーによる方法[3]も活発に研究されている。本論文は、自由電子レーザー(FEL)を用いて、レーザーによる方法を大規模にしようとする提案である。

量子コンピュータの動作を説明するのに、ブロッホ・ベクトルを用いたブロッホ球による表現がある。これは、ファインマンが提案した[4]。これは2準位の原子レーザーにのみ有効である。したがって、自由電子レーザーのような相対論ビームを使うような三準位レーザーには、直接は使えない。

まず、電子に乗った系での方程式を議論する。さらに、3準位レーザーを議論する。FEL 動作をブロッホ球ベクトルで示せる事を示す。さらに基準座標系を選んで、遷移確率の2次方程式が重根をもつ場合に、2準位レーザーと似てくる可能性がある。これを論じる。

### 2. ファインマンのブロッホ球モデル

原子の2つの準位にある電子の波動関数が

$$\psi(t) = c_1(t)\phi_1 + c_2(t)\phi_2 = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle$$

で表されるとする。系のハミルトニアンに対して

$$H_0\phi_1 = (E_0 - \hbar\omega_c)\phi_1$$

$$H_0\phi_2 = (E_0 + \hbar\omega_c)\phi_2$$

が成り立つ。系に摂動  $V$  が加わり、ハミルトニアンは、

$H = H_0 + V$  となる。ここで、 $V$  は、2行2列の行列で

$$V = \begin{bmatrix} V_{aa} & V_{ab} \\ V_{ba} & V_{bb} \end{bmatrix}$$

とする。

FEL の場合、共鳴エネルギーより高いビームエネルギーの電子を用い、運動エネルギーが電磁波エネルギーに変わるようにセットする。つまり、 $a \rightarrow b$  が

$b \rightarrow a$  よりも大きい。つまり、 $V_{ab} > V_{ba}$  である。

時間に依存するシュレディンガー方程式と共役式に

$$\psi(t) = c_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi^*(t) = c_1^*(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2^*(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

上の2式を代入し、そこから、4つの式を得る。

$$i\hbar \frac{dc_1}{dt} = c_1 [(\hbar\omega_c) + V_{aa}] + c_2 V_{aa}$$

$$i\hbar \frac{dc_1^*}{dt} = c_1^* [(\hbar\omega_c) + V_{aa}] + c_2^* V_{ab}$$

$$i\hbar \frac{dc_2}{dt} = c_2 [(-\hbar\omega_c) + V_{bb}] + c_1 V_{ba}$$

$$i\hbar \frac{dc_2^*}{dt} = c_2^* [(-\hbar\omega_c) + V_{bb}] + c_1^* V_{bb} .$$

さらに、ここで、3つの実関数を定義する。

$$R_1 \equiv c_1 c_2^* + c_2 c_1^* \quad R_2 \equiv i(c_1 c_2^* - c_2 c_1^*)$$

$$R_3 \equiv c_1 c_1^* - c_2 c_2^* .$$

この関数を微分する。 $R_1$  の場合には

$$\frac{dR_1}{dt} = \frac{dc_1}{dt} \cdot c_2^* + c_1 \cdot \frac{dc_2^*}{dt} + \frac{dc_2}{dt} \cdot c_1^* + c_2 \cdot \frac{dc_1^*}{dt}$$

である。右辺の一次微分式に、上記の4式を、各項に代入して整理する。

同様に  $dR_2/dt$  および  $dR_3/dt$  に対しても計算する。整理すると、

$$\frac{dR}{dt} = \omega \times R$$

ここで、 $R = (R_1, R_2, R_3)$   $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$

であり、 $\omega$  の各成分は

$$\omega_x \equiv (V_{ab} + V_{ba})/\hbar$$

<sup>#</sup> ozaki@post.kek.jp

$$\omega_y \equiv i(V_{ab} - V_{ba})/\hbar$$

$$\omega_z \equiv \omega_0$$

であり、これは、ベクトル  $R$  が、Z 軸回りを歳差運動し、X-Y 平面で章動する事を示している。また

$$R^2 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1$$

であり、球面上を動く。

量子コンピュータでは、 $|0\rangle$  や  $|1\rangle$  の状態から  $\pi$ -pulse や  $\pi/2$ -pulse のレーザー光でブロッホ球面上の移動を行い、量子演算とする[5]。2準位レーザーでは原理的に実行できる。

### 3. 3準位レーザーとしての FEL

電子の分散関係は  $E_e = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}$  であり、放物線である。光子の分散関係は、 $E_p = cp_p$  であり、直線である。電子が、ある状態から光子を発生したとしても、エネルギー保存則や運動量保存則を満たす到達点はない。

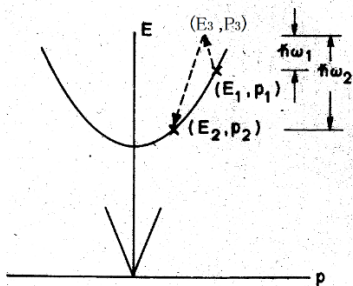


Figure 1: The electron and photon dispersion relations are shown. Neither emission nor absorption of a photon can occur from an electron. However, a free electron can emit two photons.

Figure 1 に示すように、エネルギーの異なる2光子の場合は、保存則を満たすような解が存在する[6]。

## 4. 電子静止系での回転方程式

### 4.1 実験室系での運動方程式

ヘリカル・アンジュレーター磁場の

$$B = -B_0 [\cos(k_u z) e_x + \sin(k_u z) e_y]$$

である。磁場は、ねじのようで、回転電子の運動は

$$x(t) = \frac{eB_0}{\gamma m_e k_u^2 v_0} \sin(\omega_u t)$$

$$y(t) = -\frac{eB_0}{\gamma m_e k_u^2 v_0} \cos(\omega_u t)$$

$$z(t) = v_0 t = c \left( 1 - \frac{1}{2\gamma^2} (1 + K^2) \right) t$$

一定速度で回転しながら進む。その半径は、

$$r_{hel} = \frac{eB_0}{\gamma m_e k_u^2 v_0} \approx \frac{K}{\gamma k_u} \quad \text{である}$$

### 4.2 ローレンツ変換

電子が Z 軸の正方向に、速度  $\beta = vc$  で進んでいるとする。実験室系を S、電子と共に動く座標系を S' とする。

ヘリカル・アンジュレーター磁場、この静磁場は、ローレンツ変換で高周波になる。

$$E'_u = \gamma \beta c (-B_y e'_x + B_x e'_y) \quad B'_u = \gamma (B_x e'_x + B_y e'_y)$$

ここで、座標もローレンツ変換されている。

静磁場は  $\omega = 0$  であるから、位相部分は、 $\omega' = \gamma(-vk_u)$  と  $k'_u = \gamma k_u$  になる。

FEL 入力のレーザー電磁場も、ローレンツ変換で

$$E'_\perp = \gamma (E_\perp + v \times B)$$

$$B'_\perp = \gamma (B_\perp - v \times E / c^2)$$

となる、位相の部分は、 $\omega'_L = \gamma(\omega_L - \beta k_L / c)$  と

$k'_L = \gamma(k_L - \beta \omega_L / c)$  となる。

### 4.3 電子静止系での角運動量の方程式

サイクロトロン運動をするので角運動量を持つ。

$$L_z = mvr_c = \frac{mc}{k_u} \frac{K^2}{\gamma^2}$$

外部電場などによる外乱  $\omega$  があれば、回転のトルクとなる。角運動量の変化は、

$$\frac{dL}{dt} = L \times \omega$$

である。この回転方程式から、遅い歳差運動と早い章動が発生する。位相項で、変動がない条件、つまり、微分のゼロが、FEL 共鳴の動作点である。

また、磁気モーメントと角運動量は

$$\mu_z = -\frac{e}{2m} L_z$$

の関係にある。

## 5. 磁場の量子化

2次元平面でのサイクロトロン運動のハミルトニアンは、以下である。

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\gamma m} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] + \frac{1}{2} \gamma m \omega_c^2 (x^2 + y^2).$$

生成・消滅演算子を用いて、

$$H = \hbar\omega_c \left( \left( b_x^\dagger b_x + \frac{1}{2} \right) + \left( b_y^\dagger b_y + \frac{1}{2} \right) \right)$$

と書けるので、エネルギーは、

$$E = \hbar\omega_c (n_x + n_y + 1)$$

である。量子化して、離散的なものになったエネルギー準位が、ランダウ準位である。整数値に応じて、円軌道と楕円軌道がある。

平面内の運動の場合、角運動量  $L$  で議論するほうが容易になる。さらに、 $[H, L_z] = 0$  で可換あり、同時固有関数を求めることができる。電磁場による摂動があれば、近似計算ができる。

## 6. 密度行列の方法

### 6.1 3準位系

3準位の系の量子の量子力学的状態は、3つの固有状態の線形結合である。

$$\Psi = c_1(t)\psi_1 + c_2(t)\psi_2 + c_3(t)\psi_3$$

ただし、

$$|c_1(t)|^2 + |c_2(t)|^2 + |c_3(t)|^2 = 1$$

である。

多数の粒子からなる集合には、密度演算子が用いられる。まず、状態ベクトルを

$$|\psi_j\rangle = \begin{pmatrix} c_{j1}(t) \\ c_{j2}(t) \\ c_{j3}(t) \end{pmatrix}$$

と表す。状態ベクトル  $|\psi_j\rangle$  をとる確率が  $P_j$  である時、密度演算子  $\rho$  は

$$\begin{aligned} \rho &\equiv \sum_j P_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \\ &= \sum_j P_j \begin{bmatrix} |c_{j1}|^2 & c_{j1}c_{j2}^* & c_{j1}c_{j3}^* \\ c_{j1}^*c_{j2} & |c_{j2}|^2 & c_{j2}c_{j3}^* \\ c_{j1}^*c_{j3} & c_{j2}^*c_{j3} & |c_{j3}|^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である。

### 6.2 ブロツホ方程式

密度行列の時間変化は

$$i\hbar\dot{\rho} = [H_{\text{int}}, \rho]$$

であり、相互ハミルトニアンは、

$$H_{\text{int}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{E}(z, t)$$

であり、電気双極子モーメントの行列要素は

$$\langle 1 | \mu | 3 \rangle \equiv \mu_{13}$$

$$\langle 3 | \mu | 2 \rangle \equiv \mu_{32}$$

$$\langle 1 | \mu | 2 \rangle = 0$$

である。上の式は、準位1にある電子が仮想光子を放射

する事を意味し、準位3に留まる。中の式は、準位3から基底の準位2に光を発する事を意味する。下の式は、電子は、直接放射しない事を意味する。

非対角要素の急激に振動する項を除くために

$$\rho_{13} = \tilde{\rho}_{13} e^{i(\omega t - kz_0)} \quad \rho_{23} = \tilde{\rho}_{23} e^{i(\omega t - kz_0)}$$

を定義し、さらに

$$\alpha = \mu_{13} E_0 / 2\hbar \quad \beta = \mu_{23} E_0 / 2\hbar$$

とする。 $E_0$ は電場である。

Bambini-Renieri 基準座標系を選ぶ[7]。つまり、 $\omega_{31} = \omega_{32}$  が成り立つとする。さらに、変数  $\Delta = \omega - \omega_{31} = \omega - \omega_{32}$  を導入する。

上記の条件で、密度行列の時間変化式の成分は

$$\dot{\tilde{\rho}}_{13} + i\Delta\tilde{\rho}_{13} = i\alpha(\rho_{33} - \rho_{11}) - i\beta\rho_{12}$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{23} + i\Delta\tilde{\rho}_{23} = i\beta(\rho_{33} - \rho_{22}) - i\alpha\rho_{21}$$

$$\dot{\rho}_{12} + i\omega_{12}\rho_{12} = i\alpha\tilde{\rho}_{32} - i\beta\tilde{\rho}_{13}$$

$$\dot{\rho}_{11} = i\alpha(\tilde{\rho}_{31} - \tilde{\rho}_{13})$$

$$\dot{\rho}_{22} = i\beta(\tilde{\rho}_{32} - \tilde{\rho}_{23})$$

$$\dot{\rho}_{33} = i\alpha(\tilde{\rho}_{13} - \tilde{\rho}_{31}) + i\beta(\tilde{\rho}_{23} - \tilde{\rho}_{32})$$

となる。新たな変数を文献[8]に従い導入する。

$$u_{ij} = \tilde{\rho}_{ij} + \tilde{\rho}_{ji}$$

$$v_{ij} = -i(\tilde{\rho}_{ij} - \tilde{\rho}_{ji})$$

$$w_{ij} = \tilde{\rho}_{ij} - \tilde{\rho}_{ji}$$

書き直すと、

$$\dot{u}_{13} - v_{13}\Delta - \beta v_{12} = 0$$

$$\dot{u}_{23} - v_{23}\Delta + \alpha v_{12} = 0$$

$$\dot{u}_{23} - v_{23}\Delta + \alpha v_{12} = 0$$

$$\dot{v}_{13} + u_{13}\Delta + 2\varepsilon w_{13} + \beta u_{12} = 0$$

$$\dot{v}_{23} + u_{23}\Delta + 2\beta w_{23} + \alpha u_{12} = 0$$

$$\dot{w}_{13} - 2\alpha v_{13} - \beta v_{23} = 0$$

$$\dot{w}_{23} - 2\beta v_{23} - \alpha v_{13} = 0$$

$$\dot{u}_{12} - \alpha v_{13} + \beta v_{23} = 0$$

$$\dot{w}_{12} - \alpha v_{13} + \beta v_{23} = 0$$

である。さらに、以下の変数

$$R_1 = \alpha_1 u_{13} + \beta_1 u_{22}$$

$$R_2 = \alpha_1 v_{13} + \beta_1 u_{23}$$

$$R_3 = (\alpha_1^2 w_{13} + \beta_1^2 w_{23} + \alpha_1 \beta_1 u_{12}) / (\alpha_1^2 + \beta_1^2)$$

$$\alpha_1 = \alpha / \varepsilon \quad \beta_1 = \beta / \varepsilon$$

を定義して、以下のように簡単化される。

$$\dot{R}_1 - \Delta R_2 = 0$$

$$\dot{R}_2 = -\Delta R_1 - \varepsilon R_3$$

$$\dot{R}_3 = -\varepsilon R_1$$

表現を変え、

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} \quad \Omega = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 \\ \varepsilon & 0 & \Delta \end{vmatrix}$$

として、ブロッホ方程式

$$\dot{R} = R \times \Omega$$

になる。解であるブロッホ・ベクトル

$$R_1(t) = K\Delta[\cos(\gamma t) - 1]$$

$$R_2(t) = -K\gamma \sin(\gamma t)$$

$$R_3(t) = R_3(0) + K\varepsilon[\cos(\gamma t) - 1]$$

を得る。ここで、

$$\gamma = \sqrt{\Delta^2 + \varepsilon^2} \quad K = \varepsilon W(0) / \gamma^2$$

とした。ベクトルの長さは、

$$R^2 = \sum_{i=1}^3 R_i^2 \neq 1$$

つまり、単位長さではない。したがって、球面上ではない。特殊な動作パラメーターでしか、球面上に位置しない。

## 7. 量子ブロッホ方程式

Dattoli の論文[9, 10]に従い、議論を進める。FEL の量子ハミルトニアンは

$$H = \frac{p_z^2}{2m} + \hbar\Omega(a_L^\dagger a_U e^{-2ikz} + a_U^\dagger a_L e^{2ikz}) + \hbar(\omega + \Omega) \left( \left( a_L^\dagger a_L + \frac{1}{2} \right) + \left( a_U^\dagger a_U + \frac{1}{2} \right) \right)$$

である。ここで、 $a_L$  と  $a_U$  は、それぞれレーザー光と、アンジュレーター磁場をローレンツ変換した疑似電磁場、これらを第2量子化した演算子である。

上述のファインマン変数を、演算子にする。

$$J_1 = \frac{1}{2}(a_L^\dagger a_U + a_U^\dagger a_L)$$

$$J_2 = \frac{1}{2i}(a_L^\dagger a_U - a_U^\dagger a_L)$$

$$J_3 = \frac{1}{2}(a_L^\dagger a_L - a_U^\dagger a_U)$$

$$J = \frac{1}{2}(a_L^\dagger a_L + a_U^\dagger a_U)$$

これらには、以下の関係がある。

$$[J_l, J_m] = i\varepsilon_{j,m,l} J_k$$

$$[J, J_l] = 0$$

ここで、 $\varepsilon_{l,m,k} \equiv \text{RicciTensor}$   $l \neq m \neq k = 1, 2, 3$ 。

このように、レーザー光と擬アンジュレーター光の結合は、角運動量のように振舞う。

次に電子の演算子を作る。

$$S^\pm = e^{\pm 2ikz}$$

$$S_3 = \frac{p}{2\hbar k}$$

電子はフェルミオンであり、通常は、反交換関係を用いるが、シュインガーに従い、ボソンとする。おそらく、原子に束縛された電子は、パウリの排他原理に従うが、自由電子には制限がないためと思われる。また、物質波と見なしている論文も多々ある。とにかく、以下の交換則を満たすとする。

$$[S^+, S^-] = 0$$

$$[S_3, S^\pm] = \pm S^\pm$$

ハミルトニアンは、以下のように書き換わる。

$$H = \hbar\tilde{\omega}S_3^2 + \hbar\Omega(J^+S^- + S^+J^-) + 2\hbar\omega\left(J + \frac{1}{2}\right)$$

ここで、 $\tilde{\omega} = 2\hbar k^2 / m$  である。

新たに、電子と場の結合の演算子、シュインガー演算子を作る。

$$R_1 = \frac{J^+S^- + S^+J^-}{2}$$

$$R_2 = \frac{J^+S^- - S^+J^-}{2i}$$

$$R_3 = J_3$$

交換関係は、

$$[R_l, R_m] = i\varepsilon_{l,m,k} R_k$$

$$[S_3, R_1] = -iR_2$$

$$[S_3, R_2] = +iR_1$$

$$[S_3, R_3] = 0$$

最後の項が意味するのは、電子の状態  $|es\rangle$ 、光子の状態  $|ps\rangle$  は、ある共通の状態  $|es, ps\rangle$  を持つ。

$$S_3 |es, ps\rangle = s |es, ps\rangle$$

$$R_3 |es, ps\rangle = r |es, ps\rangle$$

を満たし、電子と光子は、それぞれ固有値  $s$  と  $r$  を持つ同時固有状態が存在する。

ハミルトニアンのエネルギー交換する部分、電子と光の相互作用の項だけを残す。

$$H = \hbar\tilde{\omega}S_3^2 + 2\hbar\Omega R_1$$

さらに、 $H_1 = \hbar\omega S_3^2$  と  $H_2 = 2\hbar\Omega R_1$  に分けて計算する。後者は、交換するので、 $[R_1, H_2] = 0$  である。

$H_1$  についてのハイゼンベルグ方程式を解くことで済む。

$$\begin{aligned}
 \frac{dR_1}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [R_1, H_1] = \frac{1}{i\hbar} (R_1 H_1 - H_1 R_1) \\
 &= \frac{1}{2i} ((J^+ S^- + S^+ J^-) (\tilde{\omega} \hat{S}_3^2) - (\tilde{\omega} \hat{S}_3^2) (J^+ S^- + S^+ J^-)) \\
 &= \frac{1}{2i} ((J^+ S^- \tilde{\omega} \hat{S}_3^2 - \tilde{\omega} \hat{S}_3^2 J^+ S^-) + (S^+ J^- \tilde{\omega} \hat{S}_3^2 - \tilde{\omega} \hat{S}_3^2 S^+ J^-)) \\
 &= \frac{1}{2i} (\tilde{\omega} [J^+ S^-, S_3^2] + \tilde{\omega} [S^+ J^-, S_3^2]) \\
 &= \frac{1}{2i} (\tilde{\omega} J^+ [S^-, S_3^2] + \tilde{\omega} [J^+, S_3^2] S^- \\
 &\quad + \tilde{\omega} S^+ [J^-, S_3^2] + \tilde{\omega} [S^+, S_3^2] J^-)
 \end{aligned}$$

ここで、公式  $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$  を利用した。さらに  $[S_3, S^\pm] = \pm S^\pm$  を利用して、

$$= \frac{\tilde{\omega}}{2i} (J^+ S_3 S^- + J^+ S^- S_3 + S_3 S^+ J^- + S^+ S_3 J^-) .$$

更に、 $S^+ S_3 = -S^+ + S_3 S^+$  や  $S^- S_3 = S^- + S_3 S^-$  を利用する。また交換できる項は、 $S_3 J^- = J^- S_3$  のように、順序を変える。最後に、

$$\frac{dR_1}{dt} = 2\tilde{\omega} \left( \frac{J^+ S^- - S^+ J^-}{2i} \right) S_3 - i\tilde{\omega} \left( \frac{J^+ S^- + S^+ J^-}{2} \right)$$

を得る。

さらに、 $\frac{dR_2}{dt}$  と  $\frac{dR_3}{dt}$  を、同様に計算し、まとめて、

FEL 量子ブロッホ方程式を得る。

$$\frac{dR}{dt} = R \times \Omega - i\tilde{\omega} \hat{D} R$$

ここで  $R \equiv (R_1, R_2, R_3)$

$$\Omega \equiv (-2\Omega, 0, 2\tilde{\omega} S_3)$$

$$\left( \hat{D} \right)_{i,j} = \delta_{i,j} (\delta_{i,1} - \delta_{i,2}) .$$

これは、演算子の式であり、q 数である。c 数に変換してから数値計算が可能になる。

## 8. 展望

本論文の冒頭で提起した問題、つまり、FEL の座標系を適切に選択し、遷移確率の2次方程式が重根になるようにすれば、2準位レーザーと似てくると期待したが、恒等的にはならない。3準位レーザーである FEL で、ブロッホ球面上を動作点に設定する事は、動作パラメーターの特別な選択を必要とする。

本論文における3式、つまり、古典力学の回転方程式、密度行列による半古典論の式と第2量子化による式を導いた。今後、等価なのか、近似の仕方の相違なのか、今

後、研究していく。

本論文では、ランダウ準位での議論をしたが、種々の可能性がある。電子は固有スピンを持ち、2値である。また、偏光も右回転と左回転の2値である。古典力学ではヘリカル磁場の回転方向と一致するが、量子もつれ(エンタングルメント)があれば、逆回転方向が存在することになる。今後の研究である。

## 参考文献

- [1] T. Shaftan and Boris B. Blinov, "Cold Ion Beam in a Storage Ring as a Platform for Large-Scale Quantum Computers and Simulators: Challenges and Directions for Research and Development", Phys. Rev. Accel. Beams, vol. 24, p.094701, 2021.
- [2] 占部伸二, "個別量子系の物理 イオントラップと量子情報処理", 朝倉書店, 2017年.
- [3] 越野和樹, "共振器量子電磁力学 量子コンピュータのハードウェア理論", サイエンス社, 2020年.
- [4] R. P. Feynman, F. L. Vernon, R. W. Hellwarth, "Geometrical Representation of the Schrodinger Equation for solving Maser Problems", J. Appl. Phys., vol. 286, pp.49-52, 1957.
- [5] Gennady P Berman, Gary D Doolen, Ronnie Mainieri, Vladimir I Tsifrinovich, "Introduction to Quantum Computers", World Scientific Publishing (1998).
- [6] R. H. Pantell, "Energy and Momentum Conservation Requirement for Electron Interaction with Electromagnetic Radiation", in Free-Electron Generations of Coherent Radiation, Addison-Wesley Publishing Company, pp.1-14.
- [7] Giuseppe Dattoli, Federico Nguyen, "Free Electron Laser as a tool for fundamental Quantum Physics", Nucl. Instrum. & Methods B, vol. 402, pp.336-338, 2017.
- [8] R. G. Brewer, E. L. Halm, "Coherent two-photon process Transient and Steady-state cases", Phys. Rev. A11, pp.1641-1649, 1975.
- [9] Giuseppe Dattoli, "A Bloch-Like Model of the Free Electron Lase", Lett. Nuovo Cimento, vol. 28, No. 8, pp.247-251, 1980.
- [10] Giuseppe Dattoli and Alberto Renieri, "Free REE Electron Laser Quantum Analysis", Nucl. Instrum. & Methods, vol. 209, pp.193-197, 1983.