

# Analysis of betatron tune in J-PARC MR by means of MARS

Shuei YAMADA\*

High Energy Accelerator Research Organization, Accelerator Laboratory  
1-1 Oho, Tsukuba, Ibaraki 305-0801, Japan

## Abstract

Analysis of betatron tune in J-PARC Main Ring (MR) was performed by means of Movable Auto-Regressive System (MARS). MARS was extended for complex signals in order to fully exploit signals from betatron tune measurement system of MR. MARS fulfills two conflicting requirements, *i.e.*, achieving as high as possible resolution in both betatron tune and its time variation. A Comparison with analysis based on FFT is discussed.

## MARS を用いた J-PARC MR のベータトロンチューンの解析

### 1. はじめに

J-PARC Main Ring (MR) は 2008 年 5 月からビーム運転を開始した。3 GeV で入射された陽子ビームを 30 GeV まで加速し、T2K ニュートリノ振動実験施設及びハドロン実験施設に供給している<sup>[1]</sup>。

MR では、ビームを横方向に蹴って振動を励起するストリップライン型エキサイターと、ビームの振動を検出するビームポジションモニター (BPM) を用いて、KEK 12 GeV-PS と同様の構成<sup>[2][3]</sup> でベータトロンチューンを測定している。

BPM の左右 (あるいは上下) の信号の差信号はリアルタイム・スペクトラム・アナライザ (RSA) で周波数をダウンコンバートし、得られた I/Q データを EPICS<sup>[4]</sup> レコード化して ROOT<sup>[5]</sup> フォーマットでディスクに記録している。ベータトロン振動のスペクトラムは、ビームの周回周波数  $f_{rev}$  の高調波  $kf_{rev}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) のサイドバンド  $kf_{ref} \pm \nu f_{rev}$  として現れる。I/Q データを周波数解析し、サイドバンドの周波数と直近の  $f_{rev}$  の高調波との差  $\nu f_{rev}$  を  $f_{rev}$  で正規化することによりベータトロンチューン  $\nu$  を得る。

MR では、3 次共鳴を利用した遅い取り出しのためのチューンランピング<sup>[6]</sup> と、主電磁石電源の追従誤差<sup>[7]</sup> および 100 Hz 近傍と 600 Hz、1800 Hz の電流リプル<sup>[8]</sup> のためにベータトロンチューンが時間的に変動する。そのため、より細かい時間間隔でより高精度にチューンを測定する必要がある。遅い取り出しではチューンを  $\Delta\nu \sim 2 \times 10^{-4}$  以下の精度で制御することが要求されている。MR の周回周波数は 3 GeV、30 GeV でそれぞれ  $f_{rev} = 185.7$  kHz、191.2 kHz である。したがって、RSA から取得した中心周波数 5 MHz、バンド幅 1 MHz、サンプリング周波数 1.28 MHz の I/Q データを FFT で周波数解析する場合、十分な周波数分解能を得るために必要なサンプル数は 32768 であるが、時間変動の分解能は 25.6 msec と不十分になってしまう。

また、加速後半ではエキサイターが励起する振動の振幅が小さくなるが、ビームロスの原因となるためにエキサイターのパワーを上げることができない。そのため、サイドバンドの振幅が小さく、FFT では周波数解析が困難になる。

### 2. MARS による周波数の推定

#### 2.1 単一の周波数の場合

時間間隔  $\Delta t$  で離散的にサンプリングされた信号の周波数と振幅を推定する際には FFT がしばしば用いられる。FFT は周期性以外の仮定をせずに周波数成分を求める手法として有用である。一方、信号がある決まった数の周波数成分だけを含むことを仮定することで、FFT よりも精度よく周波数を推定できる手法として、自己回帰 (autoregression, AR) を用いたものが各種提案されている。この論文では、AR 法のひとつである Movable Auto-Regressive System (MARS)<sup>[9]</sup> をベータトロンチューンの測定に応用することを考える。

まず、MARS による周波数推定の原理を、単振動を用いて説明する。振幅  $r_1$ 、角周波数  $\omega_1$ 、初期位相  $\phi_1$  の単振動を時間間隔  $\Delta t$  でサンプリングしたデータ列

$$x_n = r_1 \cos(n\omega_1 \Delta t + \phi_1) \quad (1)$$

の時間発展は、行列  $A$  を用いて

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} \quad (2)$$

と表すことができる。単振動を考えているから、右辺の係数行列  $A$  は

$$A = \begin{pmatrix} 2 \cos(\omega_1 \Delta t) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

と書け、その固有値  $\lambda$  は

$$\lambda = e^{\pm j\omega_1 \Delta t} \quad (4)$$

である。すなわち、係数行列  $A$  がわかればその固有値から振動の角周波数  $\omega_1$  を決定できる。振動に減衰がある場合は固有値から振動の角周波数  $\omega_1$  と減衰係数を決定できる。

さて、未知の角周波数  $\omega_1$  を推定するには、測定データから係数行列  $A$  を求める必要がある。十分な数の測定データ  $x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) がある場合、

$$D_n = \begin{pmatrix} x_n & x_{n-1} & \cdots & x_2 \\ x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

\* shuei@post.kek.jp

で定まる行列  $D_n$  と係数行列  $A$  の間には

$$D_n = AD_{n-1} \quad (6)$$

が成り立つ。測定データ  $x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) から最小二乗法によって係数行列  $A$  を求めると、 $D_{n-1}$  の疑似逆行列  $D_{n-1}^+$  を用いて

$$A = D_n D_{n-1}^+ \quad (7)$$

となる。

## 2.2 複数の周波数成分からなる系の場合

単一周波数のデータ列と係数行列の関係式として導出した式 6、式 7 は、 $M$  個の単振動の重ね合わせとして記述される系のデータ列

$$x_n = \sum_{k=1}^M r_k \cos(n\omega_k \Delta t + \phi_k) \quad (8)$$

でも成立する。この場合は行列  $D_n$  を

$$D_n = \begin{pmatrix} x_n & x_{n-1} & \cdots & x_{2M} \\ x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_{2M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-2M+1} & x_{n-2M} & \cdots & x_1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

で定義すればよい。係数行列  $A$  は  $2M \times 2M$  の実行列で、

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{2M-1} & a_{2M} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

と書き下すことができる。固有値は互いに共役な  $M$  組の複素数である。データにノイズがある場合は、信号に含まれると周波数成分の数  $m$  が  $m < M$  となるようにモードの数  $M$  を選ばせよ。しかし、モードの数を大きくしすぎると計算の誤差やノイズを無理矢理に単振動に当てはめることになり、偽の周波数成分が現れる。

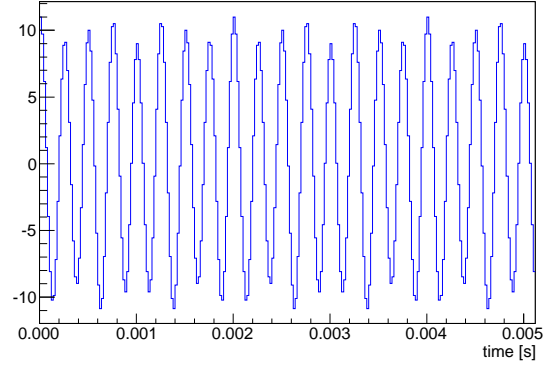
式 6 に式 9、10 を代入して成分毎に書き下し、 $x_n$  に着目すれば

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_{2M} x_{n-2M} \quad (11)$$

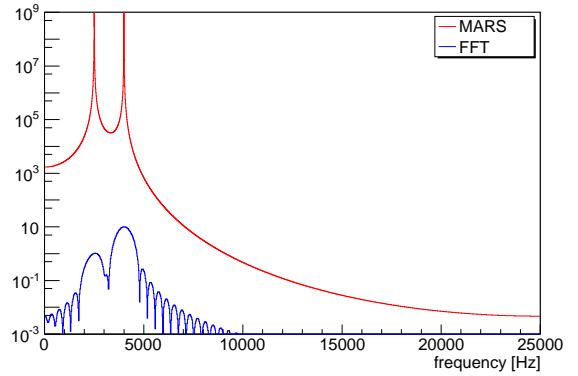
となり、係数行列  $A$  を求めることで  $2M$  次の自己回帰モデルの係数を求めていることになる。振動のパワースペクトラムは

$$P(\omega) = \left| 1 - \sum_{k=1}^{2M} a_k e^{-jk\omega \Delta t} \right|^{-2} \quad (12)$$

で与えられる。FFT で得られるスペクトラムは信号に含まれる周波数成分の振幅を表している。しかし、MARS で得られるスペクトラム (式 12) は無限インパルス応答 (式 11) の周波数伝達関数の利得であって、振幅ではないことに注意が必要である。



(a) 二つの単振動の和の信号波形



(b) 推定されたスペクトラム

図 1: MARS と FFT によるスペクトラムの比較。信号は二つの単振動 (4.0 kHz、2.5 kHz) の重ね合わせ  $f(t) = 10 \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$  を 50 kHz でサンプリングしたもの。MARS はモード数 2、128 サンプル ( $4 \times 128$  の行列  $D_n$ ) を用いてスペクトラムを推定した。FFT には 128 サンプルに hann 窓を掛けた後にゼロ詰めをし、データ長を 2048 点に増やしたものをを用いた。

図 1 に、二つの単振動を重ね合わせた信号を MARS と FFT で周波数解析して得られたスペクトラムの比較を示す。同じサンプル数のデータを解析した場合、MARS は FFT と比べるとより高い分解能でスペクトラムが得られる。

## 2.3 複素信号への拡張

RSA から取得した BPM の I/Q データを解析するために MARS を複素信号へ拡張した。 $M$  個の複素表示された振動の重ね合わせとして記述される系のデータ列

$$z_n = \sum_{k=1}^M r_k e^{j(n\omega_k \Delta t + \phi_k)} \quad (13)$$

の場合、式 7 に

$$D_n = \begin{pmatrix} z_n & z_{n-1} & \cdots & z_M \\ z_{n-1} & z_{n-2} & \cdots & z_{M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n-M+1} & z_{n-M} & \cdots & z_1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

で定まる行列  $D_n$  を代入して得られる  $M \times M$  の複素行列  $A$  の固有値を求めればよい。係数行列  $A$  の固有値は独立な  $M$  個の複素数である。係数行列  $A$  の第一行を  $a_1, a_2, \dots, a_M$  として、実信号の場合と同様に式 6 を成分毎に書き下して  $z_n$  に着目すれば

$$z_n = a_1 z_{n-1} + a_2 z_{n-2} + \dots + a_M z_{n-M} \quad (15)$$

であり、 $M$  次の自己回帰モデルの係数を求めていることになる。振動のパワースペクトラムも同様に

$$P(\omega) = \left| 1 - \sum_{k=1}^M a_k e^{-jk\omega\Delta t} \right|^{-2} \quad (16)$$

となる。

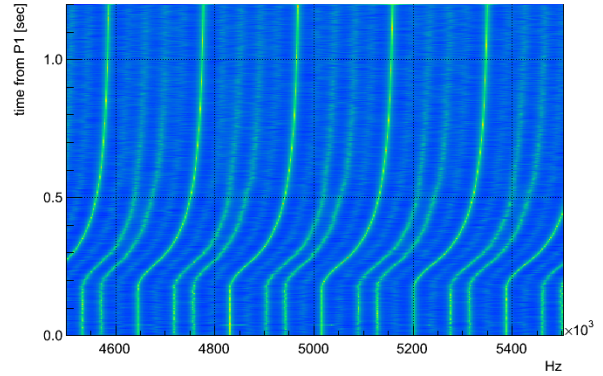
### 3. MARS によるチューンの解析

RSA から取得した中心周波数 5 MHz、バンド幅 1 MHz、サンプリング周波数 1.28 MHz の I/Q データを復素信号として MARS と FFT で周波数解析を行った。MARS は 512 サンプル、モード数 35 ( $35 \times 512$  の行列  $D_n$ ) を用いてスペクトラムを推定した。モードの数は RSA のサンプリング周波数の範囲に含まれる 3 GeV での  $f_{rev}$  の高調波の数とサイドバンドの数に多少の余裕をみて 35 とした。FFT には 512 サンプルに hann 窓を掛けた後にゼロ詰めをし、データ長を 16384 点に増やしたものを用了。

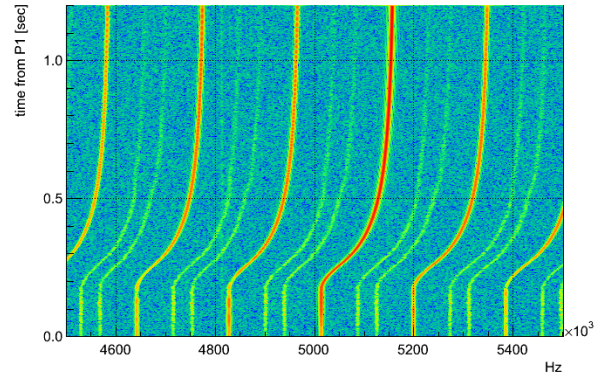
MR にビームを入射してから 1.2 秒間のベータトロン振動のスペクトラムの瀑状プロットを図 2 に示す。 $t = 0$  sec で 3 GeV のビームが入射され、 $t = 0.17$  sec で加速を開始している。 $t = 1.2$  sec でのビームのエネルギーは約 17.7 GeV である。MARS による解析では、ビームを加速してもサイドバンドが見えているが、FFT による解析では  $t = 0.8$  sec 付近を過ぎるとサイドバンドが弱くなっていく。

図 3 は  $t = 0$  sec で図 2 をスライスしたベータトロン振動のスペクトラムである。MARS、FFT ともに  $f_{rev}$  の高調波 (図中 '↑' で示した) とサイドバンドがはっきりと現れている。図中に × で示したのは MARS の係数行列の固有値から求めた振動の周波数とそのパワーである。I/Q データの帯域に含まれる  $f_{rev}$  の高調波とサイドバンドの数よりもモードの数を多くして MARS の解析を行ったため、偽の周波数成分が現れているが、それらのパワーはサイドバンドに比べると十分に小さい。一方、 $t = 1.2$  sec でスライスすると (図 4)、MARS による解析ではサイドバンドのピークが判別可能であるが、FFT による解析ではサイドバンドがバックグラウンドに埋もれてしまい判別できない。

図 5 は、MARS による解析で得られたベータトロンチューン (図 2(a)) の  $t = 0$  sec から 0.2 sec までの間の時間変動を FFT で周波数解析したものである。MARS を用いると  $t = 0$  sec から 1.2 sec までの全域に渡って 512 サンプル毎にベータトロン振動のスペクトラムを解析することが可能で、時間変動の周波数解析のナイキスト周波数は 1.25 kHz である。一方、ベータトロン振動のスペクトラムを  $t = 0$  sec から 1.2 sec までの全域に渡って FFT を用いて解析する場合には 2048 サンプル以上必要であり、時間変動のナイキスト周波数は 312.5 Hz まで低くなる。



(a) MARS を用いた解析



(b) FFT を用いた解析

図 2: 512 サンプル毎に周波数解析したベータトロン振動のスペクトラムの瀑状プロット。横軸は周波数、縦軸は時間 (全部で 1.2 秒、軸方向は下から上)。

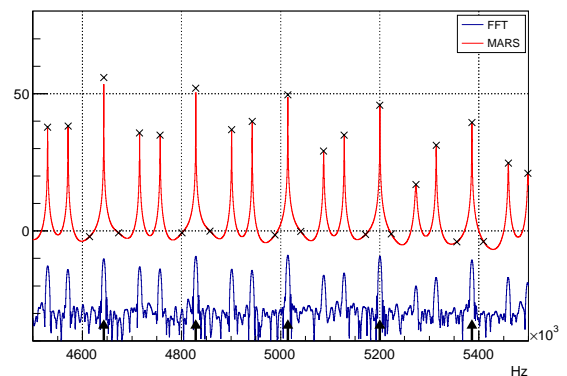


図 3: 入射直後のベータトロン振動のスペクトラム。512 サンプル用いて周波数解析を行った。

### 4. まとめ

Movable Auto-Regressive System (MARS) を複素信号へと拡張し、J-PARC MR のベータトロンチューンを解析することで、FFT よりも少ないサンプル数で精度良くベータトロン振動のスペクトラムを推定でき、チューンの時間変動もより高い周波数まで解析できた。また、

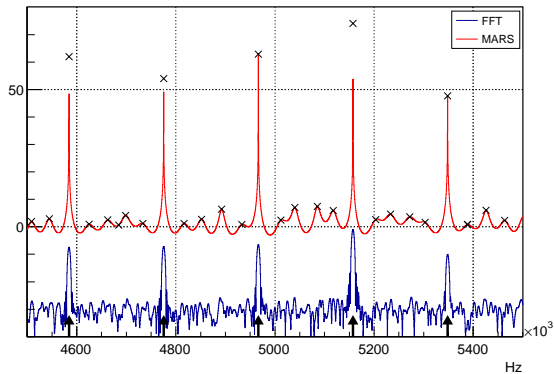


図 4: ビーム入射後 1.2 sec でのベータトロン振動のスペクトラム

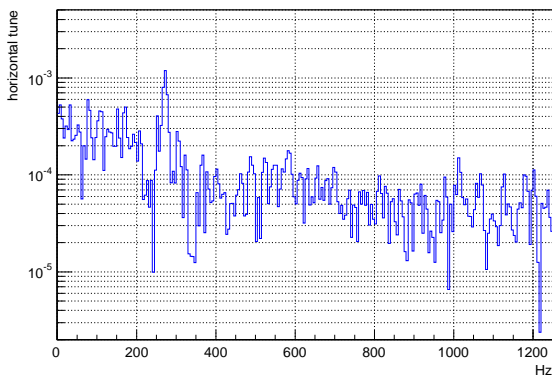


図 5:  $t = 0$  sec から 0.2 sec まで、512 サンプル毎に解析したベータトロンチューンの時間変動の周波数成分

サイドバンドが弱く FFT でベータトロン振動のスペクトラムの解析が困難な場合でも解析が可能であった。

今後、解析に用いる MARS のモード数を最適化して偽の周波数成分による影響を低減し、また、解析に用いるサンプル数を減らすことでベータトロンチューンの時間変動をより高い周波数まで解析できるようにし、MR の調整と診断の実用に供することのできる解析プログラムにするつもりである。

## 参考文献

- [1] T. Koseki, *et al.*, “J-PARC MR の運転状況”, 加速器学会誌 2012 年 9 巻 1 号, p30-40. (2012)
- [2] T. Miura, *et al.*, “Measurement of betatron-tune in the KEK 12GeV-PS/J-PARC”, Proceedings of the 1st Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan and the 29th Linear Accelerator Meeting in Japan. (2004)
- [3] T. Toyama, “J-PARC Beam Instrumentations and Diagnostics”, Proceedings of the 9th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan, FRTL01. (2012)
- [4] EPICS, Experimental Physics and Industrial Control System, <http://www.aps.anl.gov/epics/>
- [5] R. Brun, *et al.*, “ROOT: An object oriented data analysis framework.”, <http://root.cern.ch/drupal/>
- [6] M. Tomizawa, *et al.*, “IMPROVEMENTS OF SLOW-EXTRACTED BEAM FROM J-PARC MAIN RING”, Pro-

ceedings of the 8th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan, p73-75. (2011)

- [7] S. Nakamura, *et al.*, “Tracking-error reduction with variable feedback gain of Main Magnet Power Supplies in J-PARC MR”, Proceedings of the 9th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan, WEPS068. (2012)
- [8] S. Nakamura, *et al.*, “J-PARC MR における電磁石電源の問題点と対策”, 加速器学会誌 2009 年 6 巻 4 号, p292-301. (2009)
- [9] 南茂夫 監修, 河田聡 編著, 「科学計測のためのデータ処理入門」 CQ 出版. (2002)