

DESCRIPTION OF CHARGED PARTICLE BEAM

Tsukasa Miyajima*,

KEK, High Energy Accelerator Research Organization,

1-1 Oho, Tsukuba, Ibaraki, Japan, 305-0801

Abstract

The motion of a charged particle beam which consists of N particles can be described by a trajectory on $6N$ dimension phase space. Since an actual beam contains enormous number of particles, for example $N \sim 4.8 \times 10^8$ electrons in an Energy Recovery Linac, degree of freedom in a simulation and a theoretical analysis is reduced using an approximation. A macro particle model, which does not depend on the symmetry in the beam, is versatile method to describe it. In this paper, the relationship between the number of macro particles and the reproducibility of the beam is reported. The effects of number of macro particles are to reduce the resolution in the phase space, and to extend distances between particles.

荷電粒子ビームの表現方法と再現性

1. はじめに

加速器内での荷電粒子ビームは、ほぼ同じ速度をもった粒子集団として運動し、集団の重心運動だけでなく集団が作る分布の時間変化を追跡することも重要となる。ビームを構成する粒子数が N 個の場合には、 $6N$ 次元の位相空間での運動を考えることで荷電粒子ビームの運動を記述することができる。例えば、ERL で想定されている 77 pC/bunch の電子ビームの場合には、 4.8×10^8 個の電子が含まれることになるが、解析的、数値的にこれらの電子数を直接扱うのは困難であり、通常調べたい物理に応じて何らかの近似を導入してビームを記述することになる。ビームの重心運動を調べる場合には単粒子で十分であり、また系に何らかの対称性がある場合にはそれを利用して自由度を減らして、ビームを記述することになる。系に対称性がない場合には、系を粗視化して幾つかの粒子を一纏めにして記述するマクロ粒子法が用いられることが多い。このようにビームを近似して表現する方法は幾つもあるが、最も本質的なことは対象とする物理を保持したまま系の自由度を減らすということである。さらに、自由度を減らす過程でどのような物理が失われるかも把握しておく必要がある。

ここでは、基本に立ち返ってビームを記述する方法を整理し、粗視化後の自由度の数と元の荷電粒子ビームの再現性との関係について報告する。特に汎用性の高いビーム記述方法である、マクロ粒子法を用いた場合に、粗視化したときにどのような物理が失われるのか、逆に言えば、マクロ粒子に置き換えるときに何を判断材料として再現性があるとしているのかについて紹介する。最終的には、系の自由度 (例えばマクロ粒子数) を変化させていったときに、系の性質がどのように変化していくかを明らかにすることを目指している。今回の報告ではそのための準備としてマクロ粒子による表現法を整理することとした¹。

* tsukasa@post.kek.jp

¹ 計算機の発展により、対象とする系によっては全ての荷電粒子の運動を追跡することも可能になりつつあるが、我々が対象とするのは個別の荷電粒子の運動ではなく、荷電粒子ビームの集団としての運動である。また、実験から測定可能な量も粒子密度分布などの粗視化された物理量である。ビームを表現する際に粗視化して系の自由度の

2. 荷電粒子ビームを表現する方法

2.1 点電荷の集まりとしての記述

ここでは、ビームを構成する荷電粒子を古典的粒子であると考え、この場合、荷電粒子ビームは点電荷の集まりと考えることができる。点電荷による記述で良いのかについては、対象とする系に依存するが、通常の粒子トラッキング計算の場合と同様に量子論の効果は考えないこととする。また、議論を簡単にするために、ビームを構成する荷電粒子は全て同じ電荷 q 、質量 m を持つとする。ビームは N 個の荷電粒子から構成されるとすると、1 粒子につき x, y, z, p_x, p_y, p_z の 6 自由度を持ち、系全体としては $6N$ 個の自由度を持つことになる²。このとき、系の運動が決まるということは、 $6N$ 個の値が決まるということである。

ここでビームの運動状態の記述方法を考える。力学では系の状態を記述するのに位置と運動量で構成される位相空間を考える。この位相空間の取り方として次の 2 通りがある。一つは $6N$ 次元位相空間である Γ 空間上で考えるもので、その空間上での 1 点が系の運動状態を記述することになる。もう一つは 6 次元位相空間である μ 空間を考え、その上の N 個の点で運動状態を記述するというものである。 Γ 空間での運動は、時間発展に伴い位相空間上での軌跡として表現される。一方 μ 空間では、 N 個の点の時間変化として運動状態が記述される。言い換えると、 μ 空間での粒子の密度関数の時間変化を記述することに対応する。荷電粒子を点電荷として考えると、 μ 空間での密度関数は、

$$\rho(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i), \quad (1)$$

と表わされる。ここで、 $(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i)$ は i 番目の荷電粒子の位置座標と運動量を表す。このように μ 空間での密度

数を変えたときにも何らかの普遍性があると考えており、それらの関係性が明らかになれば数値計算において、系の自由度を決める際や計算結果の妥当性を評価する上で有用となる。

²ここでは、スピンの自由度は考えないこととする。

表 1: 荷電粒子ビームを表現する方法

| 表現方法 | 物理量 | 系の特徴 |
|--------------|---|--|
| 単粒子 | 重心位置 (r_0, p_0) | 重心運動 |
| 線電荷 (string) | 重心位置 (r_0, p_0) , パンチ長 l, l' | 線上は一様密度 |
| 円板 | 重心位置 (r_0, p_0) , ビーム半径 r, r' | 円板内は一様密度、連続ビームを記述 |
| 円筒 | 重心位置 (r_0, p_0) , ビーム半径 r, r' , パンチ長 l, l' | 円筒内部は一様密度 (楕円としても記述できる、 r_x, r_y) |
| 多数円筒 | 重心位置 (r_0, p_0) , ビーム半径 r_i, r'_i , パンチ長 l_i, l'_i ($i = 1, \dots, M$) | M 個の円筒でビームを記述、各円筒内は一様密度、 楕円としても記述できる ($r_{x,i}, r_{y,i}$) |
| マクロ粒子 | $6M$ 個の座標 | M 個のマクロ粒子でビームを記述 (m/e は元の粒子と同じ) |
| 現実のビーム | $6N$ 個の座標 | N 個の粒子 |

関数は、デルタ関数の集まりとして記述することができる。

ビームの運動状態を記述するという事は、これらの $6N$ 個の座標が定まるということに対応するが、現実には $6N$ 個 ($N \sim 10^9$) の粒子を扱うのは難しい。そこで、ビームを記述する際には通常何らかの近似を用いて、自由度を減らすことが行われる。次に、どのように系の自由度を減らしていくかについて考える。

2.2 系の自由度を減らす方法

系の自由度減らしてビームを記述する場合、系の性質を保存したまま自由度を減らすことが重要である。この際に系の特徴を活かした記述方法が使われる。また、調べたい物理 (重心運動、形状の変化、エミッタンス等) に合わせてビームを記述するモデルを選択することになる。系の特徴とそれに合わせたビームの表現方法を表 1 に示す。ビームの重心運動を記述する場合には、単粒子の運動を考えれば十分である。例えば加速器内でのビームの理想軌道を追跡する場合には、単粒子の軌道を追跡すれば良い。ビームの集団運動を記述する場合には、系が持つ特徴に合わせてモデルを選ぶ。進行方向の運動を記述する場合には線電荷による表現、横方向の運動を記述する場合 (連続ビーム等) には円板電荷による表現が用いられる。円筒ビームによる表現では、進行方向と横方向の運動を記述できる。ただし、これらの表現ではビーム内部は一様電荷分布であると仮定しているため、形状の時間変化以上の情報を表現することができない。ビームの内部構造を表現する方法として、多数の円筒でビームを表現する方法もある^[1]。各円筒毎に形状が変化するため、ビームをより詳細に記述することが可能である。しかしながら、ここまでの表現では各円筒内では一様電荷密度を持つと仮定しているため、ビーム内部の分布を表現することができない。そこで、ビーム内部の分布を表現する方法として、マクロ粒子法が用いられる。マクロ粒子はビームを構成する粒子と同じ質量電荷比 m/q を持つ粒子であり、粒子数を減らした点電荷の集団としてビームを表現する方法である³。マクロ粒子法の特徴としては系の対称性等の特徴を利用する必要がないため、高い汎用性を持つことが利点である。この利点のため、ビームのシミュレーションコードでは

³場合によっては点電荷ではなくマクロ粒子の大きさを定義して、衝突的な効果を考慮する場合もある。

マクロ粒子法が用いられることが多い。次に、このマクロ粒子法の基礎に立ち返って、マクロ粒子によるビームの表現では、何を振り所として元のビームを表現していると判断しているのかということを整理する。

3. マクロ粒子による表現

ここでは、例として電子ビームを考え、現実のビームをマクロ粒子の集団に置き換える際にどのような操作をしているかを整理し、現実のビームとマクロ粒子の集団でどのような違いが生じているのかを纏める。

3.1 マクロ粒子への置き換え

電子ビームは N 個の電子から構成されるとする。電磁場 E, B 中での 1 電子の運動方程式は、

$$c \frac{m_e}{e} \frac{d(\gamma\beta)}{dt} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (2)$$

と表わされる⁴。ここで、 m_e は電子の質量、 e は電子の電荷、 c は光速、 v は電子の速度で、 $\beta = v/c$ 、 $\gamma = 1/\sqrt{\beta^2 - 1}$ である。 N 個の電子から構成される電子ビームを、同じ質量、電荷を持つ M 個のマクロ粒子で表現することを考える。1 マクロ粒子辺りの質量と電荷は、 $m_m = N/Mm_e = am_e$ 、 $q_m = N/Me = ae$ となる。図 1 に示すように、1 マクロ粒子は $a = N/M$ 個の電子を一纏めにしたものと考えることができる。1 マクロ粒子の運動方程式は、

$$c \frac{m_m}{q_m} \frac{d(\gamma\beta)}{dt} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (3)$$

となり、 $m_e/e = m_m/q_m$ であるので、1 電子の運動方程式と同じとなる。以上のように、マクロ粒子によるビームの表現というのは、

- a 個の電子を一つの仮想的な粒子として、それらの集まりとしてビームを表現
- 物理的なモデル：質量 am_e 、電荷 ae を持つ、 M 個の荷電粒子の集合の運動と等価

ということに相当する。

⁴電磁場 E, B には電子ビーム自身が作る電磁場も含まれるため、マクロ粒子で表現する場合には電磁場分布の変化も考える必要がある。ここではマクロ粒子への置き換えに焦点を当てるため、電子ビーム自身が作る電磁場は考えないものとする。

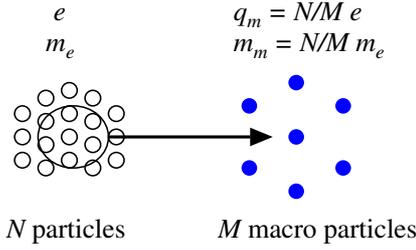


図 1: N 個の電子集団から M 個のマクロ粒子集団への置き換え。質量電荷比 m_e/e は保存される。

次に、どのような手順で N 個の電子集団を M 個のマクロ粒子の集団に置き換えるかを考える。ここで重要となるのは、系の特徴を保持したまま N 個から M 個へ変換するかということと、その過程でどのような情報が失われるかということである。まず、 N 個から M 個へ変換したときの Γ 空間と μ 空間での変化を考える。 Γ 空間では、 N 個の電子の場合は $6N$ 次元位相空間での 1 点で運動状態は記述され、 M 個のマクロ粒子の場合は $6M$ 次元位相空間での 1 点で運動状態が記述される。変換前後での運動状態を比較しようとしたとき、 Γ 空間ではそもそも自由度の数が変わってしまい、比較は難しい。一方、 μ 空間では N 個の電子の場合は 6 次元位相空間の N 点で表わされ、 M 個のマクロ粒子の場合も同じ 6 次元位相空間の M 点で表わされることになり、同じ位相空間上での点の分布として運動状態を比較することが可能である。従って、通常マクロ粒子を用いてビームを表現するということは、 μ 空間 (6 次元位相空間) での分布が変換前後で保持されるように位相空間上の点を減らすということに対応する。点電荷の集合として考えた場合、元の電子ビームの分布は式 (1) で表わされるが、 M 個のマクロ粒子の集合の場合には、

$$\rho_M(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \sum_{i=1}^M \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i), \quad (4)$$

と表わされる。元の電子分布との違いは、和の N が M に変わっただけであり、点電荷のままでは分布を比較することが難しいことがわかる。そこで、位相空間上での空間分解能を粒子密度分布が連続と見做せる程度に犠牲にして (粗視化して)、 μ 空間での粒子密度関数を考えることになる。

3.2 密度関数と粒子間距離

マクロ粒子を用いるということは μ 空間での点の数を減らすことに対応し、言い換えると、空間座標、運動量共にある分解能以下の情報が失われることになる。ここでは、どのような手順で M 個のマクロ粒子により密度関数の再現が行われ、どのような情報が失われるかを示す。

μ 空間での密度関数を再現するように位相空間中の点の数を減らす手順の概略を図 2 に示す⁵。図 2 の上段が元の N 個の点電荷からなる分布 ρ_N を示す。第一段階目として、 ρ_N が連続的と見做せる程度まで粗視化し、

⁵直接 N 個の分布から粗視化された分布を作る方法として、統計力学で使われるブロックスピン変換等のアイデアも使用可能であるが、ここでは一度密度関数に置き換える方法で考えることとする。

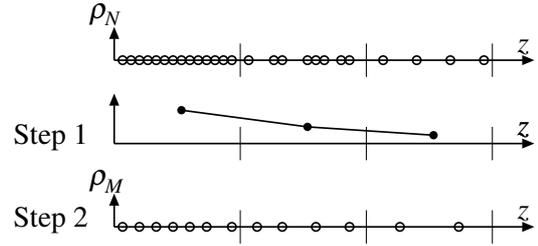


図 2: N 個の電子集団から M 個のマクロ粒子集団への置き換えの手順。一旦密度関数が連続と見做せる程度に粗視化して、その粗視化した密度関数を再現するように M 個のマクロ粒子を再配置する。

密度関数を求める。具体的には、位相空間上である間隔毎にメッシュを区切りそこに入る粒子数から密度関数を求めることができる。この過程を示したのが図 2 の中段の図である。この粗視化して求めた密度関数を再現するように M 個のマクロ粒子を位相空間上に配置することになる。この過程を示したのが図 2 の下段の図である。実際、シミュレーションなどでマクロ粒子を用いる場合にも、粗視化された密度関数がわかっているものとして、それを再現するようにマクロ粒子の分布を再現していることになる。この過程から分かることは、最終的にマクロ粒子の分布の再現性を判断する際に比較されるのは、粗視化した電子の分布 ρ_N と粗視化したマクロ粒子の分布 ρ_M であるということである。また、実際に実験で測定可能な物理量も、 $6N$ 個の座標ではなく、それをある程度粗視化して得られる μ 空間での滑らかな分布である。以上のように、再現性を判断する拠り所は、粗視化して得られた密度関数であり、この過程で元の情報がどのように失われるか、その変換の性質を知っておくことが重要である。現状では、この変換の性質を明確に示せていないが、マクロ粒子に置き換える過程でどのようなことが起きているかの概略を次に示す。マクロ粒子への置き換えを行った際に具体的に变化するのは、粒子間距離である。

位相空間の微小体積要素 $dx dy dz dp_x dp_y dp_z$ 内に含まれる粒子数は

$$dn = \rho dx dy dz dp_x dp_y dp_z, \quad (5)$$

と表わされる。これより、逆に 1 個の電子が占める位相空間の体積を

$$\frac{dx dy dz dp_x dp_y dp_z}{dn} = \frac{1}{\rho}, \quad (6)$$

と求めることができる。実空間 (x, y, z) での粒子間距離を求めるために、密度関数を運動量空間で積分した、

$$\rho_r = \iiint \rho dp_x dp_y dp_z, \quad (7)$$

を用い、1 個の粒子が占める実空間上の体積を立方体と近似すると粒子間距離は、

$$l_N = \left(\frac{1}{\rho_r} \right)^{1/3}, \quad (8)$$

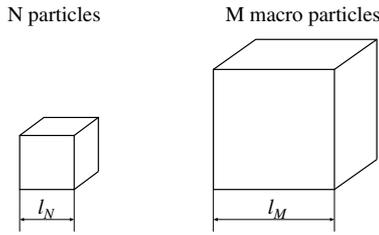


図 3: N 個の電子集団から M 個のマクロ粒子集団への置き換えたときに粒子間距離の変化。

と求めることができる。当たり前の結果であるが、密度の高い領域では粒子間距離が短くなり、密度の低い領域では粒子間距離が長くなる。密度関数は、 N 個から M 個へ変化すると、 $\rho_M = \rho_N/a$ となる。 N 個の電子を M 個のマクロ粒子で表現する場合の粒子間距離は、

$$l_M = a^{1/3} l_N, \quad (9)$$

となり、 N 個の場合と比べて $a^{1/3}$ 倍長くなることになる。この様子を図 3 に示す。密度関数の変化が激しい場合には、粒子間距離は広い範囲の空間スケールを持つことになり、空間電荷効果等の計算に影響を与えることになる。特に低密度領域での影響が大きくなる。

マクロ粒子数を変えたときに粒子間距離が変化する例として、2次元平面上でのガウス分布を考える。図 4 に $M = 10^3$ と $M = 10^5$ の場合の粒子分布を示す。図から明らかのように、同じガウス分布を表現する場合でも、粒子数によって大きく異なることがわかる。マクロ粒子数を変えたとき、次の 2 つの影響が大きく表れる。一つ目は、粒子数によって位相空間上の粒子間距離が変化するということであり、 $M = 10^3$ の場合には、明らかに粒子間の間隔が広がっている。二つ目は、粒子数によっては低密度部分で、位相空間上の点がなくなってしまうということである。ガウス分布は連続分布であり、裾の部分で密度が低くなり、この影響が顕著に見える。図 4 のように、裾の部分では $M = 10^5$ では点が幾つか存在していた部分でも、 $M = 10^3$ では点がいなくなってしまうということが生じる。点自体がなくなるといことは、その部分を表現することができず、情報が損失していることを表わしている。ビームの裾の低密度部分が重要な役割を果たす場合には、十分注意する必要がある⁶。

以上、ここまではマクロ粒子を用いて分布を再現する際の抛り所と、粒子数が変化したときの粒子間距離の変化、すなわち位相空間内の分解能の変化を調べてきた。実際には、ビームが作る電磁場への影響やエミッタンス等のビームを記述する物理量との関係を考慮する必要があり、最後にそれらへの影響について簡単に示す。

3.3 分解能と電磁場、ビームを記述する物理量との関係

位相空間内での分解能の劣化の影響として、空間電荷効果のようなビームが作る電磁場の分解能への影響が考えられる。この影響を評価するには、対象とするビー

⁶ここでは全て同じマクロ粒子でビームが構成されるとしているが、裾の部分でも点が存在するように重みを変えたマクロ粒子(質量電荷比は同じ)を使うこともできる。

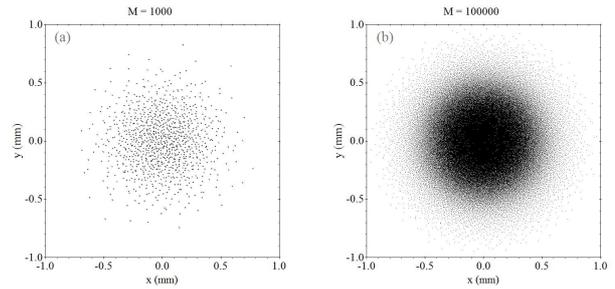


図 4: マクロ粒子による 2 次元平面でのガウス分布の再現。(a) 10^3 個、(b) 10^5 個。

ムに応じてデバイ長との比較から必要な分解能を見積もり必要がある。

ビーム状態を記述する物理量と分解能の関係については、rms サイズやエミッタンス等は、分布のモーメントから求められるということが関係してくる。これは、分布のモーメント計算ではビームのコア部分だけでなく端の部分の影響も重要であるため(高次のモーメントでは端の密度の薄い部分の影響も無視できなくなってくる)、裾の部分での点のあるなしが効いてくるということである。粒子数によって裾の部分での点のあるなしが決まる境界があるので、対象とする物理に応じて適切な粒子数を選ぶ必要がある

最後に、マクロ粒子と密度関数の関係を整理すると、再現性の抛り所は密度関数を正しく再現するかということになる。また、マクロ粒子の代わりに密度関数の時間発展を直接追うことも Vlasov 方程式等を用いて可能である。ただし、密度分布の時間発展を直接を追う場合、マクロ粒子で問題となる分布の裾で点が消えるという問題はないが、範囲と分解能の問題は残る。

4. まとめ

N 個の粒子からなるビームの運動を記述するには、 $6N$ 次元の位相空間を考えれば良いが、現実的には何らかの近似を導入して、自由度を減らしてビームを記述することになる。ビームを表現する方法として、系の特徴を保持しつつ、系の対称性を利用して自由度を減らす方法について整理し、汎用性の高い表現方法であるマクロ粒子を用いた場合に、自由度を減らす過程でどのように情報が失われていくかを検討した。元の系の特徴を保ったままマクロ粒子で記述する方法として、 μ 空間(6次元位相空間)での密度関数を再現するように位相空間中の点の数を減らすという操作が行われる。この操作によってマクロ粒子数を変えた時の影響は、位相空間上の粒子間距離が長くなる(分解能の劣化)、粒子数によっては低密度部分で、位相空間上の点がなくなってしまう(情報の喪失)ということである。今後の展開として、粒子数を変化させた時の系(位相空間の状態と電磁場分布)の変換性を明らかにすること(波数空間でのカットオフ導入や、ブロックスピン変換を例にして)と、電磁場を含んだ動力学への適用を予定している。

参考文献

[1] Massimo Ferrario, HOMDYN.