

# FEM ANALYSIS OF X-BAND RF GUN USING 6-NODE ISOPARAMETRIC ELEMENT

Shugo Hirasawa<sup>\*A)</sup>, Fumito Sakamoto<sup>A)</sup>, Shinya Sasaki<sup>A)</sup>

<sup>A)</sup>Akita National College of Technology

1-1 Bunkyocho, Iijima, Akita, Akita, 011-8511

## Abstract

Electron linear accelerators are applied to use of medical and industrial fields, which are studied on down sizing by making higher frequency and currently have an X-band(11.424 GHz) range and above. In order to down sizing accelerators for cost reduction and convenience, it requires high-precise and effective accelerating cavity designing. In this paper, we will report on an evaluation of an electromagnetic field simulator we are developing. Our simulator is high precise and specialized in accelerator cavity designing. We chose a spherical cavity as a test model for the evaluation, and we analyzed this model by using the simulator. Then we got the electromagnetic distribution as a  $TM_{01}$  mode on the cavity. By comparing this numerical solution and theoretical solution as a eigenvalue, we found a precision minimized to about  $10^{-6}$  as a relative error. By subdividing elements, the precision was improved on  $10^{-8}$  order, but from this, the precision got worse by increasing number of partitions. Therefore we are going to try to find the cause of it. Additionally, we compared our simulator and Superfish code using X-band RF gun cavity.

## 六節点アイソパラメトリック要素を用いた X-band 高周波電子銃の高精度有限要素解析

### 1. はじめに

電子線形加速器は医療、産業分野および先端科学の広い分野に応用されるとともに、低コスト化・利便性のための小型化の研究が行われている。加速器の小型化に伴い、加速器設計には高精度の電磁場解析が要求され、その解析手法には有限要素法や境界要素法といった数値解析手法が用いられている。有限要素法では構造メッシュ、非構造メッシュを問わず解析できるので、凹凸や曲線境界を有する加速空洞に対して有効な解析手法である。

本研究では加速器設計に特化した電磁場解析シミュレータの作成を目的に、三角形二次要素による離散式の導出と解析アルゴリズムのコーディングを行った。また加速空洞の性能評価に必要な各種パラメータの計算プログラムも実装し、実際の X-band RF ガンの加速空洞に対してシミュレーションを実行した。その結果を既存の電磁場解析コードである Superfish による解析結果と比較し、種々の検討を行った。

本発表では三角形二次要素を用いた有限要素法による電磁場解析方法の計算原理、作成したシミュレータの性能評価、Superfish との比較結果、そして現状の問題点について報告する。

### 2. 計算原理

本研究で作成した電磁場解析シミュレータは有限要素法により空洞内における電磁場の支配方程式を離散化し、その離散式を共役勾配法を用いて解くことで電磁場解析を行う。本節ではその離散化の過程および共役勾

配法について説明し、解析結果から内部 Q 値とシャントインピーダンスを求める方法を述べる。

#### 2.1 加速空洞内の磁場の方程式

空洞内での磁場分布は次のヘルムホルツ方程式に従う。

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1)$$

ここで  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  は位置  $\mathbf{r}$  における磁場、 $\omega$  は各周波数、 $c$  は光速である。式 (1) に対応する磁場のヘルムホルツ方程式の汎関数  $J[\mathbf{H}]$  は

$$J[\mathbf{H}] = \int_V \left[ (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot (\nabla \times \mathbf{H}^*) - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* \right] dV \quad (2)$$

である。 $V$  は問題領域、すなわち空洞の体積である。

加速空洞は軸対称構造であるので、円筒座標系  $(r, \theta, z)$  を用いる。加速には TM モードを用いることが多く、この場合非ゼロの成分は  $E_r, E_z, H_\theta$  である。したがって  $\mathbf{H} = (0, H_\theta, 0)$  であり、 $J[\mathbf{H}]$  を改めて  $J[H_\theta]$  とおくと、式 (2) は

$$J[H_\theta] = \iint_D \left[ \left(\frac{\partial H_\theta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial H_\theta}{\partial r}\right)^2 + 2\frac{H_\theta}{r} \frac{\partial H_\theta}{\partial r} + \left(\frac{H_\theta}{r}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 H_\theta^2 \right] 2\pi r dr dz \quad (3)$$

と表せる。 $D$  は  $V$  を  $z-r$  平面に投影した面積である。ここで変分原理より、 $I$  の変分  $\delta I = 0$  なる  $H_\theta$  が式 (1) の解である。

\* antiheadsphere@gmail.com

2.2 三角形二次要素を用いた有限要素法による離散化  
問題領域を  $N$  個の三角形二次要素で分割すると、

$$H_{\theta}(r, z) = \sum_{I=1}^N (H_{\theta})_I \quad (4)$$

と表せる。要素  $I$  上の磁場  $H_{\theta I}$  は補間関数  $N_i$  を用いて

$$(H_{\theta})_I = \sum_{i=1}^6 H_{\theta i} N_i \quad (5)$$

と書ける。ここで  $i$  は要素  $I$  から見た局所的な節点番号である（三角形二次要素は 6 節点）。

式 (4), 式 (5) により、全節点数を  $n$  とすれば、各節点上の磁場  $H_{\theta 1}, H_{\theta 2}, \dots, H_{\theta n}$  が分かれば問題領域上の任意の磁場を近似により求めることができる。したがって、式 (3) に示した  $H_{\theta}$  を変関数とする汎関数  $J[H_{\theta}]$  の変分問題は  $H_{\theta 1}, H_{\theta 2}, \dots, H_{\theta n}$  を変数とする多変数関数  $J(H_{\theta 1}, H_{\theta 2}, \dots, H_{\theta n})$  の極値を求める問題と等価である。

最終的に、多変数関数の極値の条件

$$\frac{\partial J}{\partial H_{\theta 1}} = \frac{\partial J}{\partial H_{\theta 2}} = \dots = \frac{\partial J}{\partial H_{\theta n}} = 0 \quad (6)$$

から次の固有値問題の形に帰着する。

$$\mathbf{A}\mathbf{H}_{\theta} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{H}_{\theta} \quad (7)$$

$\lambda = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$  であり、 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  は節点座標に依存する  $n \times n$  行列、また  $\mathbf{H}_{\theta}$  は

$$\mathbf{H}_{\theta} = \begin{pmatrix} H_{\theta 1} \\ H_{\theta 2} \\ \vdots \\ H_{\theta n} \end{pmatrix} \quad (8)$$

である。式 (7) を共役勾配法を用いて解くことで、問題領域の磁場を求めることができる。

### 2.3 加速空洞の各種パラメータの計算 [1, pp.13-14]

前小節で求めた磁場から電場、内部  $Q$  値、シャントインピーダンスを計算する。

マクスウェル方程式に磁場を代入し、次のように電場を得る。

$$E_r = -\frac{1}{\epsilon\omega} \frac{\partial H_{\theta}}{\partial r} \quad (9)$$

$$E_z = \frac{1}{\epsilon\omega} \left( \frac{H_{\theta}}{r} + \frac{\partial H_{\theta}}{\partial r} \right) \quad (10)$$

内部  $Q$  値  $Q_0$  とシャントインピーダンス  $R_{sh}$  は空洞の形状に依存するパラメータであり、それぞれ次式で定義される。

$$Q_0 = \omega \frac{W}{P_{wall}} \quad (11)$$

$$R_{sh} = \frac{E_0^2}{dP_{wall}/dz} \quad (12)$$

ここで  $W$  は電磁場に蓄えられるエネルギー、 $P_{wall}$  は空洞内壁面での損失、 $E_0$  は軸上の電場の振幅、 $dP_{wall}/dz$  は単位長さ当たりの損失を示す。なお

$$W = \frac{\mu_0}{2} \int_V |\mathbf{H}|^2 dV \quad (13)$$

$$P_{wall} = \frac{\zeta_m}{2} \int_S |\mathbf{H}|^2 dS \quad (14)$$

であり、 $\mu_0$  は真空の透磁率、 $\zeta_m$  は表皮抵抗、 $V, S$  はそれぞれ空洞体積と空洞内壁面を示す。

## 3. 性能評価

前節の計算原理に基づいて電磁場解析シミュレータ（以下、本シミュレータ）を作成し、その性能評価を行った。評価方法は、まず解析解が既知である単純な形状の問題領域に対してシミュレーションを行い、理論通りの電磁場分布が得られるか、そして解析解に対してどの程度の精度でその結果が得られたのかを検討する。次に実際の加速空洞の 1 周期に対してシミュレーションを行い、妥当な電磁場分布や加速器設計に必要なパラメータが得られるか検証する。

### 3.1 球状テストモデルの解析

本シミュレータの動作確認および性能評価を行うために、図 1 に示すテストモデルを設定した。

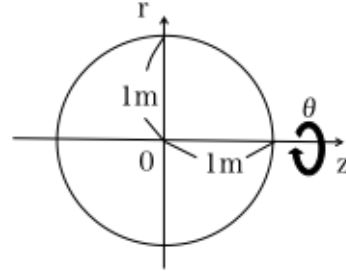


図 1: テストモデル

このテストモデルを解析したところ、図 2 に示す結果が得られた。ただし対称性から 1/4 領域のみの計算結果となっている。

図 2 から、空洞内部には  $TM_{01}$  モードの電磁場が形成されていることがわかる。したがって本シミュレータは電磁場の分布に関して、前節で述べた計算原理に基づいて動作していることが確認できた。

次にどの程度の精度で解が得られるのかを検討する。誤差  $\epsilon$  を次のように定義する。

$$\epsilon = \frac{|\lambda_{calc} - \lambda_{true}|}{\lambda_{true}} \quad (15)$$

ここで  $\lambda_{calc}$  は本シミュレータによる固有値  $\lambda = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$  の計算結果、 $\lambda_{true}$  は解析解によって得られる真値である。図 3 に要素数と誤差の関係を示す。

この図から分かるように、1000 要素程度までは細分化に応じて精度が向上していくが、それ以降分割を進め

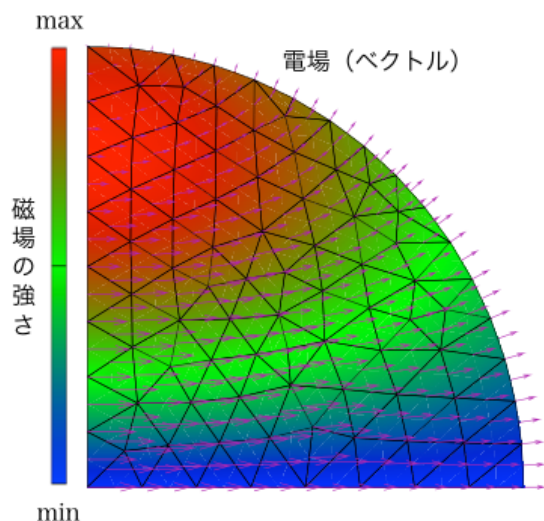


図 2: テストモデルの解析結果

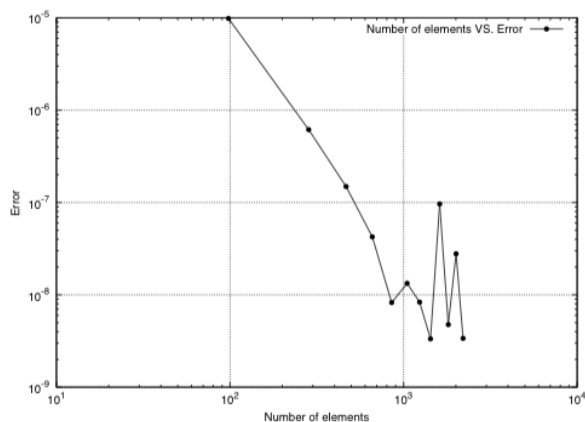


図 3: 要素数と誤差の関係

でも却って精度が悪くなるか、頭打ちになる傾向が見られた。この原因を調査するために、式 (7) を共役勾配法だけでなくヤコビ法やバイセクション法を用いて解いた。しかし結果は変わらず、精度は固有値問題の解法に依らないことが分かった [2]。したがって式 (7) における  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  が決定した時点で、すなわち節点の配置と要素分割が終了した時点で、その問題に対する解の精度が決定すると言える。ゆえにこの問題の対策として、より良いメッシュ生成方法をプリプロセッサに実装する必要がある。

### 3.2 既存の電磁場解析コードとの比較

前小節で本シミュレータはある程度の精度で電磁場解析を行えることが分かった。次に実際の X-band RF ガンの加速空洞 1 セルに対して、どのような電磁場分布が得られるのかをテストした。本シミュレータによる電磁場解析による磁場分布を図 4 に、Superfish によるものを図 5 に示す。

これらの図から、本シミュレータは凹凸と曲面形状を持つ実際の加速空洞に対しても妥当な電磁場分布を得

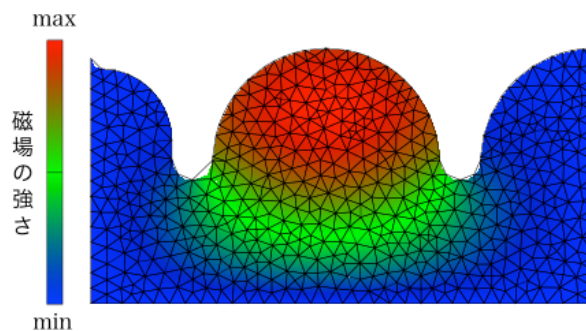


図 4: 本シミュレータによる加速空洞の磁場分布

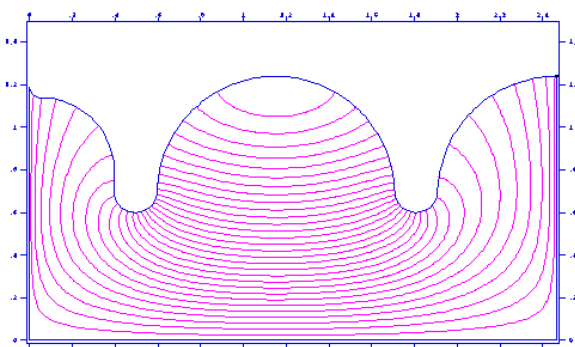


図 5: Superfish による加速空洞の電磁力線

られることが分かる。また空洞の各種パラメータの比較を表 1 に示す。

表 1: 空洞の各種パラメータ

パラメータ	単位	本シミュレータ	Superfish
周波数 $f$	GHz	10.961	10.963
蓄積エネルギー $W$	mJ	245.06 <sup>†</sup>	245.06 <sup>†</sup>
空洞壁損 $P_{\text{wall}}$	W	154.68	156.02
内部 Q 値 $Q_0$	-	10911	10819
シャントインピーダンス $R_{\text{sh}}$	MΩ/m	77.269	157.93

<sup>†</sup> 蓄積エネルギーは等しくなるように規格化した。

本シミュレータと Superfish で求めた周波数、空洞壁損、内部 Q 値はおおよそ一致しているが、シャントインピーダンスに約 2 倍の違いが生じている。これは本シミュレータにおける磁場の規格化方法に起因すると考えられるため、今後検討していく。

### 参考文献

- [1] 高田耕治, "高周波加速の基礎", KEK Report2003-11, (2005)
- [2] 佐々木信也 他, "高周波加速空洞の高精度解析のための有限要素解析における要素形状に関する検討", in this proceedings