

## B ファクトリーにおけるビームビームリミットの研究

大見和史、多和田正文、生出勝宣

高エネルギー加速器研究機構 〒305-0801 茨城県つくば市大穂 1-1

### 概要

円形衝突加速器ではルミノシティはビームビーム効果によって制限される。もしビーム（バンチ内の）粒子分布が衝突によって変わらなければ、ルミノシティは2つのバンチ内の粒子数の積に比例して増加する。しかしながらある値以上に粒子数を増やしてもルミノシティが粒子数の積で増加しなくなる。この現象をビームビームリミットと呼ぶ。ここでは様々な計算機シミュレーション法を用い、ビームビームリミットのメカニズムについて議論する。

### 1 はじめに

高ルミノシティBファクトリー、KEKBとPEP-IIはKEK、SLACにおいて順調に運転され、計画のルミノシティ $\sim 10^{34}$   $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ を達成した。両ファクトリーともより高ルミノシティ $10^{35}\sim 10^{36}$   $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ に向けての計画を提案している。このためにビームビームリミットをどこまで上げられるか研究している。ビームビームリミットは以下のビームビーム係数 $\xi$ によって特徴づけられる。

$$\xi_{x(y)} = \frac{N_{\mp} r_e}{2\pi\gamma_{\pm}} \frac{\beta_{\pm}}{\sigma_{x(y)}(\sigma_x + \sigma_y)} \quad (1)$$

ここでNはバンチ内粒子数、 $\gamma$ は相対論係数、 $\sigma_{x(y)}$ は水平(垂直)ビームサイズ、 $\beta$ は衝突点でのベータ関数である。ビームビーム係数は衝突している相手のビームによるインコヒーレントチューンシフトと見なすことができる。ビームビームリミットは経験的にビームビーム係数がバンチ内粒子数の増加に対して、ある値で飽和する現象であると考えられている[1]。これは粒子数の増加に対してビームサイズが増大することに起因する。

ビームビームリミットは様々な理由から起こる。ラティスによる変換はビームビーム効果に影響する。その変換の線形部分は衝突点でのツイスパラメータ、分散関数である。衝突点で分散やx-y結合があると、ラティス部分の規格座標と、ビームビームのそれが一致しなくなるため、ルミノシティに影響する。非線形部分であるクロマティシティやチューンシフトの振幅依存もビームビーム効果に関係する。これらはどちらかという技術的な問題である。ここで問題にするのはこれらのエラーをなくしたときの純粋なビームビームリミットである。ビームビームの物理的なシステムはチューン、放射減衰、励起とビームビーム係数により決まる。バンチ長を考慮する場合 $\sigma_z/\beta_y$ も対象となる。

放射減衰時間はBファクトリーの場合数千ターンである。一方タウチャームやファイファクトリーでは数万から数十万ターン、陽子リングではさらにずっと長い。ビームビームリミットは放射減衰と関係する。ここでは数千ターンの減衰時間を持ったBファクトリーのビームビームリミット

トを対象とし議論する。

ビームビームリミットの研究のために strong-strong シミュレーションを用いる。両ビームは多数のマクロ粒子で表され、ビーム同士の相互作用は一方のビーム中の粒子が相手のビームの電磁場によりうける力を評価することで行われる。

ビームビームリミットは2次元モデルにおいて過去に研究された[2]。2次元モデルでは長さがゼロのバンチ同士の衝突を扱っている。それによると $\xi > 0.05$ でコヒーレント $\pi$ モード不安定性がおり、その結果ビームサイズが増大し、ルミノシティリミットが起こる。

ここでは3次元シミュレーションによるビームビームリミットの研究結果を著す。3次元シミュレーションはバンチを長さ方向にスライスすることで行われる。3次元シミュレーションでは2次元と異なる振る舞いが見られる。以下で Super KEKB のパラメータを用い、それを説明する。

表1: Super KEKB のデザインパラメータ

	HER	LER
C	3016 m	3016 m
E	8 GeV	3.5 GeV
$N_b$	5000	5000
$N_e$	$5.5 \times 10^{10}$	$12.6 \times 10^{10}$
$\beta_x/\beta_y$	0.3/0.003 m	0.3/0.003 m
$\epsilon_x/\epsilon_y$	24/0.18 nm	24/0.18 nm
$v_x/v_y$	0.508/0.55	0.508/0.55
$v_s$	0.02	0.02
$\tau_{x,y}/T_0$	4000	6000

### 2 シミュレーションで見られるビームビームリミット

BBSS と呼ばれる strong-strong シミュレーションコードを用いビームビームリミットのメカニズムを調べる。シミュレーションのアルゴリズムは文献[2]に著されている。ビームビーム力のポテンシャルを求めるために2次元のメッシュ化された空間での粒子メッシュ法を用いる。この方法はいくつかのビームビームシミュレーションコードに用いられている。このシミュレーションコードはまたガウス近似をしたビーム間の相互作用もサポートしている。

3次元への拡張は基本的にz方向に沿ってバンチを分割することで行われる。分割されたスライス間の相互作用は2次元的に行われる。バンチ内の粒子はシンクロトロン振動によってスライス間を移動する。垂直方向のベータ関数がバンチ長程度の場合、横方向のキックがスライス間の移

動によって不連続に変化する。その不連続からくるノイズによって正しくビームの平衡分布を求めることが難しくなる。このためポテンシャルを  $s$  に対して内挿し、その不連続を極力なくしている。

シミュレーションでは粒子はデザインエミッタンス、ベータで決まるガウス分布で初期化される。放射減衰と放射励起は規格座標に対して作用される。1つのパンチは100,000個のマクロ粒子で表され、5個のスライスに分割される。シミュレーションはマクロ粒子を放射減衰時間の数倍の時間トラッキングすることで、衝突点における平衡分布を与える。ルミノシティはその平衡分布から以下のように求められる。

$$L = \sum_{f_{rep}} \int \rho_+(x, y, z; s) \rho_-(x, y, z; -s) dx dy dz' \quad (2)$$

ここで  $f_{rep}$  は繰り返し周波数で、積分は  $s=(z-z')/2$  の条件の下で行われる。

図1(a)-(c)にいくつかの電流値に対するビームビーム係数と、ビームサイズが示される。30,000ターン後の分布からルミノシティを式(2)によって求められている。ビームビーム係数はルミノシティから以下から求められる。

$$\xi_y = \frac{2r_e \beta_y}{N \gamma f_{rep}} L \quad (3)$$

ここで水平方向のビームサイズはデザイン値と考え  $\sigma_x \gg \sigma_y$  を仮定している。ビームサイズはガウス分布から離れるので、それからビームビーム係数をもとめると値が小さくなりすぎ、ルミノシティとの対応が着きにくくなるためである。

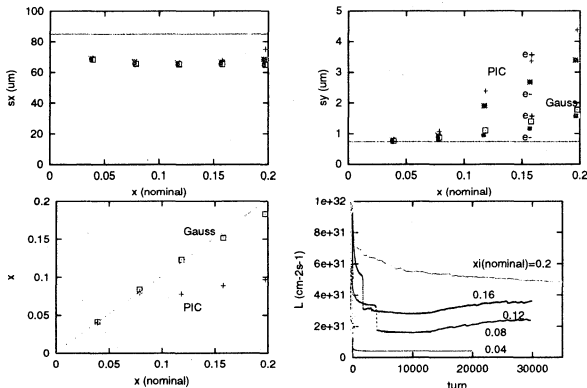


図1：電流に対するビームビーム係数、ビームサイズ

粒子メッシュ法とガウス近似によって得られたビームビーム係数、ビームサイズが図に示されている。粒子メッシュ法とガウス近似では結果がかなり異なる。x方向のビームサイズはほぼ一定であるが、y方向のビームサイズは明らかに大きくなっている。粒子メッシュ法の垂直ビームサイズはガウス近似のそれより大きい。ガウス近似は0.2以上のビームビーム係数を示すが、粒子メッシュ法は0.1程度で飽和している。またどちらの方法でも1次、2次モーメント  $\langle x_i \rangle$ ,  $\langle x_i x_j \rangle$  にコヒーレント振動は見られなかった。ガウス分布の固定ビームを用いた weak-strong シミュ

レーションはガウス近似の strong-strong シミュレーションと同様な結果を与えた[3]。

図1(d)にいくつかの電流値に対するルミノシティの時間変化を示す。 $\xi=0.12$ と0.16に急激なルミノシティ減少が見られる。その急減は異なるシミュレーション条件、マクロ粒子数、メッシュ数、スライス数によって時々見られる。急減自身は不規則だが、最終の値は物理条件が同じなら同じになる。またガウス近似では見られない。

ガウス近似との違い、急減が見られることはビームビームリミットの原因に対してなんらかのヒントを与えているように見える。その急減に対して以下でより詳しく見ることにする。ガウス近似のシミュレーションで求められた最終の粒子分布を使って粒子メッシュシミュレーションを行ってみる。入力ビームビーム係数0.2の場合で行う。図2はビームビーム係数とビームサイズの時間変化を示す。ルミノシティとy方向ビームサイズに150ターン近傍で急変が見られる。それ以外の変数にはきわだった変化は見られなかった。ビームサイズは急変後緩やかに増加しているが、ルミノシティはほぼ一定である。たぶん分布の裾部分が成長しているため、ルミノシティには利いていないと思われる。最終結果は、途中経路は違うが図1と同様になった。

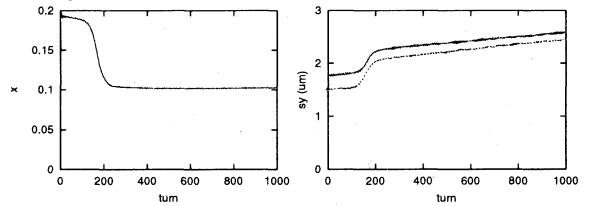


図2：ルミノシティとビームサイズ急変の例

図3にルミノシティの急減時の、ビーム粒子分布の変化を、時間を追ってプロットした。電子(青)と陽電子(赤)の分布が図に示されている。両方の分布は同時に重なり合っ膨らみ、ガウス分布からはずれていく。このずれは互いに強調し合っている。つまり一方がガウスからずれると他方はさらにずれるように強いられる。30,000ターン後の分布が図3(d)に示される。陽電子の分布は電子に比べ広がっているがこれは放射減衰時間が長いためである。両ビームの分布は主に裾部分でガウス分布から離れ、これが衝突している2つのビームの平衡分布であると考えられる。

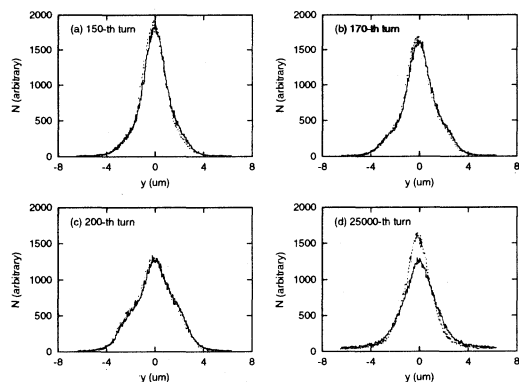


図3：ルミノシティ急変の際のビーム分布の変化

ここでビームビームリミットはコヒーレント運動ではなく、2つのビームの平衡分布によって決定されているという考えに達する。この考えを確かめるために strong-strong シミュレーションで得られた平衡分布を使って、粒子メッシュ法に基づいた weak-strong シミュレーションを行ってみた。もしインコヒーレントな現象によってビーム分布が決まっているとしたら、最終的には strong-strong の結果と同じになるはずである。一方のビーム（ここでは電子ビーム）を strong-strong シミュレーションで得られた分布で固定し、陽電子ビームを設計値のガウス分布で初期化し、シミュレーションを行った。こうすることで小さな脈動を含むいかなるコヒーレント運動も除去した形でシミュレーションができる。図4はその weak-strong シミュレーションによって得られたビームビーム係数とビームサイズを示す。40,000 ターン後に求められたビームビーム係数は strong-strong シミュレーションで求められた値とほぼ一致する。(b)(c)は weak-strong と strong-strong で求められたビームサイズだが、これらもほぼ一致する。ビームビーム係数、ビームサイズ一致は完璧というわけではない。ビームビーム係数で 15% 程度の不一致が見られている。

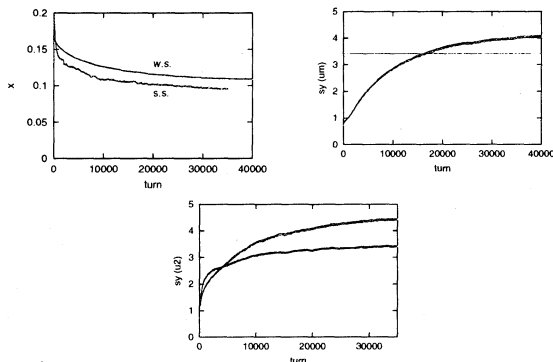


図4：Strong-strong の結果を使つての weak-strong シミュレーション

2次元シミュレーションではコヒーレント振動によるビームビームリミットが見られる。コヒーレント振動は3次元シミュレーションでは見られない。バンチ長を短くする( $\sigma_z < \beta_y/2$ )と、3次元でも観測できる。おそらくコヒーレント振動はバンチ内のz方向のチューン広がりによって不鮮明になり、インコヒーレントなビームビームリミットが優位になるのであろう。

### 3 まとめ

ビームビームリミットはガウス近似や粒子メッシュ法を用いた Weak-strong、strong-strong シミュレーション法を用いて調べられた。粒子メッシュ法においてBファクターではビームビームリミットが0.1程度であることがわかった。ビームビームリミットは衝突している2つのビームの平衡分布によって決まっている。その分布はガウス分布から離れたものになっている。Strong-strong シミュレーションから得られた分布を使って weak-strong シミュレーションをしても同様な結果が得られた。

平衡分布の形成について考えてみよう。ビームビーム相互作用は多次元の非線形力学系であり、非可解ゆえの分散の性質を持つ[4,5]。この特徴は1次元のバンチ長を扱う、Haissinski や Vlasov 方程式による、ポテンシャル井戸変形の問題[6,7]とは本質的に異なる。可解系では平衡分布は放射減衰と励起の比、すなわちエミッタンスで表せる。非可解系では非線形性による分散も重要なため、放射減衰、励起それぞれが陽に關係する。また厳密な意味での平衡分布が存在するかははっきりしない。このばあい平衡分布は我々の時間スケールでの実質的な平衡分布と考えるべきであろう。

ガウス近似をした weak-strong、strong-strong シミュレーションはより高いビームビームリミット  $> 0.2$  を示す。しかし上で述べたビームビームリミットのメカニズムを考えれば、ガウス近似が適切でないことがわかるであろう。

ただしガウス近似を使った weak-strong は計算としては正しい。それは片方のビームをもし何らかの方法で（たとえばビームビーム力を外からの別のビームで補償するなど）ガウス分布を保てれば0.2のビームビーム係数が達成できることを意味する。

### 参考文献

- [1] J. T. Seeman, *et al.*, IEEE Trans. Nucl. Sci. **30**, 2033 (1983).
- [2] K. Ohmi, Phys. Rev. **E62**, 7287 (2000).
- [3] K. Ohmi, M. Tawada, K. Oide, Proceeding of PAC03.
- [4] A.J. Lichtenberg and M.A. Lieberman, Regular and Chaotic Dynamics, Springer-Verlag (1992).
- [5] J.K. Koga and T. Tajima, Phys. Rev. Lett. **72**, 2025 (1994).
- [6] J. Haissinski, Nuovo Cimento, **18B**, 72 (1973).
- [7] K. Hirata, Phys. Rev. **D37**, 1307 (1988).